Atiyah-Singer 指数定理 ノート

足立 健朗

Contents

1 Atiyah-Singer 指数定理概説

1.1 Atiyah-Singer 指数定理

まず、Atiyah-Singer 指数定理そのものを提示しよう。M は n 次元コンパクト微分可能多様体、E と F は M 上の複素ベクトルバンドルとする。$D\colon C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(F)$ を楕円型微分作用素とする。このとき、次の定理が成立する。

定理 1.1. (Atiyah-Singer)

$$\mathrm{index} D = (-1)^n (ch(\sigma(D))\mathcal{T}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))[TM]$$

以下で、上の指数定理につかわれている用語と記号の説明をする。その後、証明の概略を追うことにする。

1.2 解析的指数

M 及び E、F は上の通りとする。

定義 1.1. 滑らかな写像 $D\colon C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(F)$ が微分作用素であるとは、D は線形作用素であり、かつ $\mathrm{supp}(D(s)) \subset \mathrm{supp}(s)\ \forall s \in C^\infty(E)$ が成立することを言う。ただし、ここで

$$\mathrm{supp}(s) = \overline{\{x \in M | s(x) \neq 0\}}$$

である。

$(U, \phi) = (x; x^1, \cdots, x^n)$ を $x \in M$ のまわりの局所座標とする。微分作用素 D は (U, ϕ) 上

$$D = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha D^\alpha$$

と表わされる。ただし、ここで α は多重指数

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_i) \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_i$$

であり、記号 D^α は

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{1\alpha_1} \cdots \partial x^{i\alpha_i}}$$

を表わす。また、$a_\alpha \in C^\infty(\mathrm{Hom}(E|_U, F|_U))$、すなわち各 $x \in U$ に対し $a_\alpha\colon E_x \longrightarrow F_y$ は線形写像である。

定義 1.2. 微分作用素 D , $\forall x \in U$ 、$\forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対し、D のシンボル $\sigma_D(x, \xi)$ を

$$\sigma_D(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = n} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

で定義する。ここで、

$$\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

ただし $\alpha_i = 0 \Rightarrow \xi_i^{\alpha_i} = 1$ という記法を用いた。

各 $x \in M$ に対し $\sigma_D(x, \xi)\colon E_x \longrightarrow F_x$ は線形写像を与えている。すなわち、$\sigma_D(\cdot, \xi) \in C^\infty(\mathrm{Hom}(E, F))$ である。

定義 1.3. 微分作用素 D が楕円型微分作用素であるとは、$\forall x \in M$、$\forall \xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対し D のシンボル $\sigma_D(x, \xi)\colon E_x \longrightarrow F_x$ が線形同型写像となることを言う。

定義 1.4. 楕円型微分作用素 D に対し、その解析的指数を

$$\mathrm{index} D := \dim \mathrm{Ker} D - \dim \mathrm{Coker} D$$

により定義する。

注意 1. D が楕円型作用素ならば、D は Fredholm 作用素である。すなわち、$\dim \mathrm{Ker} D < \infty$、$\dim \mathrm{Coker} D < \infty$。

1.3 位相的指数

M は n 次元コンパクト微分可能多様体、E と F は M 上の複素ベクトルバンドルとする。$D\colon C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(F)$ を楕円型微分作用素とする。$B^n M$ で T^*M の単位球バンドルを、$S^{n-1}M$ で T^*M の単位球面バンドルを表わすことにする。$S^{n-1}M \subset B^n M \subset T^*M$ となっている。π で T^*M から M への射影を表わすことにする。$(U, \phi) = (x; x^1, \cdots, x^n)$ を $x \in M$ のまわりの局所座標とする。U 上、$T^*M|_U \approx U \times \mathbb{R}^n$ と局所自明化が与えられているとする。写像 $\sigma(D)\colon \pi^*E|_{S^{n-1}M} \longrightarrow \pi^*F|_{S^{n-1}M}$ を局所的に

$$\begin{array}{ccc} U \times S^{n-1} \times E|_U & \longrightarrow & U \times S^{n-1} \times F|_U \\ (x, \xi, v) & \longmapsto & (x, \xi, \sigma_D(x, \xi) v) \end{array}$$

により定義する。ここで、S^{n-1} は単位球面を表わす。D が楕円型微分作用素であれば、$\sigma(D)$ はバンドル同型写像となる。このとき、K 理論における差要素を考えることができて、３つ組 $(\pi^*E|_{S^{n-1}M}, \pi^*F|_{S^{n-1}M}, \sigma(D))$ から仮想バンドル

$$[\pi^*E, \pi^*F, \sigma(D)] \in K(B^n M, S^{n-1}M) = K(T^*M)$$

が得られる。

注意 2. $K(B^n M, S^{n-1}M) = \tilde{K}(B^n / S^{n-1}M) = \tilde{K}(T^*M^+)$。ここで、$T^*M^+$ は T^*M の１点コンパクト化を表わす。

定義 1.5. 楕円型微分作用素 D に対し、仮想バンドル

$$\sigma(D) := [\pi^*F, \pi^*F, \sigma(D)] \in K(T^*M)$$

を D のシンボル類と言う。

位相的指数を定義する準備として、ベクトルバンドル及び仮想バンドルの特性類に言及しよう。多様体 X 上の複素ベクトルバンドル V に対しその Chern 類 $c(V)=1+c_1(V)+c_2(V)+\cdots\in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$ を後述する分解原理により形式的分解

$$c(V)=\prod_{i=1}^{\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}V}(1+x_i),\quad x_i\in \mathrm{H}^2(X;\mathbb{Z})$$

の形に書いておく。このとき、V の Chern 指標 ch を

$$ch(V):=\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}V}e^{x_i}\in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q})$$

で、Todd 類 $\mathcal{T}(V)$ を

$$\mathcal{T}(V):=\prod_{i=1}^{\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}V}\frac{x_i}{1-e^{x_i}}\in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q})$$

で定義する。Chern 指標 その加法性により仮想バンドルに対しても定義することができる。

定義 1.6. 楕円型作用素 D の位相的指数 t-index$D$ を

$$\text{t-index}D:=(-1)^n(ch(\sigma(D))\mathcal{T}(TM\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}))[TM]$$

で定義する。

従って、定理 1.1 は

$$\mathrm{index}D=\text{t-index}D$$

と書くことができる。

1.4　指数定理の再定式化

指数定理を証明するために、Atiyah-Singer の論文に従い K 理論を用いることにする。そのためには、Theorem 1.1 を K 理論の言葉で書き換えておくと都合がよい。M の接バンドルに Riemann 計量を入れて、T^*M と TM を同一視する。楕円型作用素 D に対してそのシンボル類 $\sigma(D)\in K(TM)$ を対応させる。逆に、任意のクラス $a\in K(TM)$ に対してある楕円型擬微分作用素 D が存在して $a=\sigma(D)$ となる。このような擬微分作用素 D はホモトピー類レベルで一意に定まる。楕円型擬微分作用素の指数はそのホモトピー類だけで決まるから、解析的指数を改めて次のような写像 a-index: $K(TM)\longrightarrow\mathbb{Z}$ である考えることにする。a-index は図式

$$\begin{array}{ccc} K(TM) & \xrightarrow{\text{a-index}} & \mathbb{Z} \\ a=\sigma(D) & \longmapsto & \dim\mathrm{Ker}D-\dim\mathrm{Coker}D \end{array}$$

により定義される。前出の記号と比較しておこう、楕円型微分作用素 D に対しては $\mathrm{index}D = \text{a-index}(\sigma(D))$ である。

同様にして、位相的指数も、K 理論の言葉を使って、写像 $\text{t-index}\colon K(TM) \longrightarrow \mathbb{Z}$ として表わしたい。2つの埋め込み $i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^N$、$j\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^N$ を考える。ここで、P は $\mathbb{R}^N$ の原点とする。これに対し準同型写像 $i_!\colon K(TM) \longrightarrow K(T\mathbb{R}^N)$、$j_!\colon K(TP) \longrightarrow K(T\mathbb{R}^N)$ がそれぞれ定義される。特に $j_!$ は同型写像である。($K(T\mathbb{R}^N) \cong K(TP) \cong \mathbb{Z}$)。そこで、合成写像

$$K(TM) \xrightarrow{i_!} K(T\mathbb{R}^N) \xrightarrow{{j_!}^{-1}} K(TP) \cong \mathbb{Z}$$

を位相的指数と呼ぶことにする。すなわち、

$$\begin{array}{ccc} K(TM) & \xrightarrow{\text{t-index}} & \mathbb{Z} \\ a & \longmapsto & {j_!}^{-1} i_!(a) \end{array}$$

である。K 理論と特性類の理論における計算から、

$$\text{t-index}(a) = (-1)^n (ch(a)\mathcal{T}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))[TM]$$

を示すことができる。特に楕円型微分作用素 D に対しては、

$$\text{t-index}(\sigma(D)) = (-1)^n (ch(\sigma(D))\mathcal{T}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))[TM]$$

となるから、これは前の定義に一致することがわかる。

以上より、指数定理 1.1 を次の形に表現することができる。

定理 1.2.

$$\text{a-index}(\sigma(D)) = \text{t-index}(\sigma(D))$$

これは次の定理の系である。

定理 1.3.

$$\text{a-index} = \text{t-index}$$

1.5 指数定理証明の方針

現在、指数定理の証明は何通りかが知られている。それらは、すべて興味深いものである。ここでは、Atiyah-Singer による K 理論を用いた証明を追うことにする。それは、前節で取り上げた解析的指数と位相的指数をしかるべく定義すること、そして、以下の公理を満たす抽象的指数準同型写像

$$\mathrm{ind}^M\colon K(TM) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を考え、もし抽象的指数準同型写像が存在すればそのような写像は一意的であることを示すこと、そして最後に解析的指数も位相的指数もともに抽象的指数準同型写像である

ことを示すことである。実際の議論では必ずしもこの順序が話を進むわけではない。これは、論理的な順序を表わしている。上のそれぞれの証明ステップは、それぞれ非常に豊かな数学的内容を含んでいる。解析的指数の定義には楕円型擬微分作用素の理論と K 理論が用いられる。位相的指数の定義には K 理論が、そしてそのコホモロジー的な表現には Hirezebruch 等によって究められた特性類の理論が用いられる。抽象的指数準同型写像の一意性と位相的指数が抽象的指数準同型写像であることは同時に議論される。また、解析的指数が抽象的指数準同型写像であることは、解析的指数の構成作業の中で同時に論じられる。

定義 1.7. 以下の公理を満たす準同型写像 $\mathrm{ind}^M\colon K(TM) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を抽象的準同型写像と言う。
(B1)（切除性）U は コンパクトでない多様体とし、$i\colon U \longrightarrow M$、$j\colon U \longrightarrow N$ を埋め込みとする。このとき、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} K(TU) & \xrightarrow{i_!} & K(TM) \\ {\scriptstyle j_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ind}^M} \\ K(TN) & \xrightarrow{\mathrm{ind}^N} & \mathbb{Z} \end{array}$$

(B2)（規格化）$j\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^N$ を原点 P の埋め込みとする。このとき $j_!\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ に対し

$$\mathrm{ind}^{T\mathbb{R}^N} j_!(1) = 1$$

が成り立つ。
(B3)（乗法性）X、F はコンパクト有向多様体とする。$a \in K(TX)$、$b \in K(TF)$ とするとき、

$$\mathrm{ind}^{X\times F}(ab) = \mathrm{ind}^X(a)\,\mathrm{ind}^F(b)$$

が成り立つ。

References

[1] M.F Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 423-433.

[2] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators:* I, Ann. of Math. **87** (1968), 484-530.

[3] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators:* III, Ann. of Math. **87** (1968), 546-604.

[4] A. Borel and F. Hirzebruch, *Charcteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 458-538; **81** (1959), 315-382; **82** (1960), 491-504.

[5] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer, 1966.

[6] R. Palais et. al., Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem, Annals of Math. Study **57**, Princeton.

2　K 理論再説

2.1　復習 K 理論

ここでは K 理論について復習することにする。X はコンパクト Hausdorff 空間とする。$V(X)$ を X 上の複素ベクトルバンドルの同型類全体の集合とする。$V(X)$ は Whitney 和 $\oplus$ 及びテンソル積 $\otimes$ に関して可換半環となる。ここで可換半環から可換環を構成する Grothendieck の方法を思い出そう。任意の可換半環 A に対し、 $F(A)$ で A により生成される自由群を表わす。$F(A)$ の 部分群 $R(A)$ を

$$R(A) := \langle \{(a +_A b) - a - b | a, b \in A\} \rangle$$

で定義する。ここで $+_A$ は A における加法を $-a$ は $F(A)$ における逆元を表わす。A の積構造から $F(A)$ にも自然に積構造が入り、$R(A)$ は可換環 $R(A)$ はそのイデアルになることがわかる。従って可換環

$$K(A) := F(A)/R(A)$$

を考えることができる。この $K(A)$ を A の Grothendieck 群と言うのであった。$K(A)$ の元を A の仮想元と言う。この構成法を $V(X)$ に適用する。

定義 2.1.

$$K(X) := K(V(X)) = F(V(X))/R(V(X))$$

$K(X)$ の元を X 上の仮想バンドルと言う。

注意 3. K はコンパクト Hausdorff 空間のカテゴリーから可換環のカテゴリーへのホモトピーファンクターである。

　記法として $\underline{n} = X \times \mathbb{C}^n$ を用いる。$K(X)$ について知られている基本的事実について言及しておく。

事実 2.1. 任意の $x \in K(X)$ に対して X 上の複素ベクトルバンドル E と整数 n が存在して $x = [E] - [\underline{n}]$ と書くことができる。

定義 2.2. $V(X)$ 上の同値関係 $\sim$ を次のように定める。E、$F \in V(X)$ に対し $E \sim F$ であるとは、整数 m、n が存在して

$$E \oplus \underline{m} \cong F \oplus \underline{n}$$

が成り立つことである。集合 $\mathcal{E}(X)$ を

$$\mathcal{E}(X) := V(X)/\sim$$

で定義する。 $\mathcal{E}(X)$ は可換半環である。(実は可換環である。)

X が 1 点よりなる場合、明らかに同型

$$K(X) \cong \mathbb{Z}$$
$$a = \exists[\underline{n}] \longmapsto n$$

が成り立つ。これは次元写像

$$\dim\colon V(X) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

の自然な拡張とみなされるものである。さて、もと通り X はコンパクト Hausdorff 空間とする。1 点 $x \in X$ を固定する。包含写像 $\iota\colon \{x\} \hookrightarrow X$ に対し、引き戻し

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\iota^*} & K(\{x\}) \\ a & \longmapsto & a|_x \end{array}$$

が自然に定義できる。

定義 2.3. 可換環 $\tilde{K}(X)$ を次で定義する。

$$\tilde{K}(X) := \operatorname{Ker} \iota^*.$$

事実 2.2.

$$\mathcal{E}(X) \cong \tilde{K}(X)$$

次に (X, Y) はコンパクト対、すなわち X はコンパクト Hausdorff 空間で Y は X の閉部分空間とする。

定義 2.4. 可換環 $K(X, Y)$ を次で定義する。

$$K(X, Y) := \tilde{K}(X/Y).$$

事実 2.3.

$$K(X, \emptyset) \cong K(X).$$

さて K 群の概念を X が局所コンパクト Hausdorff 空間の場合にも拡張しておこう。

定義 2.5. 局所コンパクト Hausdorff 空間 X に対し、その K 群 $K(X)$ を

$$K(X) := \tilde{K}(X^+)$$

で定義する。ここで X^+ は X の 1 点コンパクト化を表わす。

この節の最後に、 K 群についての最も重要な性質 Bott 周期性を証明なしであげておく。

定理 2.1. コンパクト Hausdorff 空間 X に対して、同型

$$K(S^2) \otimes K(X) \cong K(S^2 \times X)$$

が成り立つ。また、同型

$$\tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(X) \cong \tilde{K}(S^2 \wedge X)$$

及び

$$\tilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

最後の同型は次のようにして得られる。$S^2 = \mathbb{C}P^1$ と考え、H を $\mathbb{C}P^1$ 上の標準バンドルとする。第 1 Chern 類は準同型写像

$$c_1 \colon V(X) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X; \mathbb{Z})$$

を与えるが、これは自然に

$$c_1 \colon \tilde{K}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X; \mathbb{Z})$$

に拡張できる。$\tilde{K}(S^2)$ は $[H] - [\underline{1}]$ により生成される。$\mathrm{H}^2(S^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であること、また、$c_1(H) = \pm 1$、$c_1(\underline{1}) = 0$ より $c_1([H] - [\underline{1}])$ は $\mathrm{H}^2(S^2; \mathbb{Z})$ の生成元を与える。よって定理の同型は

$$c_1 \colon \tilde{K}(S^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

により与えられる。TS^2 を $S^2 = \mathbb{C}P^1$ の正則接ベクトルバンドルとすると

$$[H] = [TS^2] = [\Lambda^1(TS^2)]$$

であることを注意しておく。

2.2 K 理論再構築

X は局所コンパクト Hausdorff 空間とする。

定義 2.6. X 上の長さ n の複素ベクトルバンドルの列

$$E \colon 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{\alpha_0} E^1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E^n \longrightarrow 0$$

を考える。E が複体であるとは、各 $i = 0, \cdots, n-1$ に対し $\alpha_{i+1}\alpha_i = 0$ が成り立つことであるとする。

複体 E に対し、その台 $\mathrm{supp}(E)$ を

$$\mathrm{supp}(E) := \overline{\{x \in X | 0 \longrightarrow E^0_x \xrightarrow{\alpha_{0,x}} E^1_x \xrightarrow{\alpha_{1,x}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{1,x}} E^n_x \longrightarrow 0 \text{ is not exact}\}}$$

と定める。以下ではコンパクトな台を持つ複体だけ考える。

定義 2.7. 複体 E、F がホモトピックであるとは、$X \times I$ 上の複体 G が存在して、$G|_{X\times\{0\}} \cong E$ かつ $G|_{X\times\{1\}} \cong F$ が成り立つことであると定義する。

E と F がホモトピックであることを $E \simeq F$ と書く。関係 $\simeq$ は複体全体の集合上の同値関係である。複体 E の属する同値類を $[E]$ と書き、E のホモトピー類と言う。$C(X)$ は X 上の複体のホモトピー類全体の集合、$C_\emptyset(X)$ は $C(X)$ の部分集合

$$C_\emptyset := \{[E] \in C(X) | \mathrm{supp}(E) = \emptyset\}$$

であるとする。$C(X)$ 上の加法を以下のように定義する。E、F を

$$\begin{aligned} E\colon 0 &\longrightarrow E^0 \xrightarrow{\alpha_0} E^1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E^n \longrightarrow 0 \\ F\colon 0 &\longrightarrow F^0 \xrightarrow{\beta_0} F^1 \xrightarrow{\beta_1} \cdots \xrightarrow{\beta_{m-1}} F^m \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

とする。このとき、和 $E+F$ を

$$E+F\colon 0 \longrightarrow E^0 \oplus F^0 \xrightarrow{\alpha_0 \oplus \beta_0} E^1 \oplus F^1 \xrightarrow{\alpha_0 \oplus \beta_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{i-1} \oplus \beta_{i-1}} E^i \oplus F^i \xrightarrow{\alpha_i \oplus \beta_i} \cdots$$

により定義する。ただし、$i > n$ に対し $E^i = 0$ 、$\alpha_i = 0$ また $j > m$ に対し $F^j = 0$、β_j である。この和に対し $C(X)$ は可換半群、$C_\emptyset$ はその部分半群となる。さらに後述するように積も定義できて、これらは可換半環になる。

定義 2.8.

$$K_{new}(X) := C(X)/C_\emptyset(X)$$

実は次が成り立つ。

事実 2.4.

$$K_{new} \cong K(X)$$

この証明については Atiyah [1] THEOREM 2.6.1 $\sim$ 2.6.14 を参照されたい。これにより、以下 $K_{new}(X)$ を単に $K(X)$ と書くことにする。

注意 4. 上の同型は

$$\begin{array}{ccc} K_{new} & \longrightarrow & K(X) \\ [E] & \longmapsto & \sum_k (-1)^k [E^k] \end{array}$$

によって与えられる。

U を X の開集合とする。自然な射影

$$i\colon X^+ \longrightarrow X^+/(X^+ - U) \approx U^+$$

から、自然な準同型

$$i^*\colon K(U) \longrightarrow K(X)$$

が誘導される。$\{U_\alpha\}$ を X の相対コンパクト開集合からなる有向集合とする。これに対応する可換半環の帰納系

$$\{i^*_{\alpha\beta}\colon K(U_\alpha) \longrightarrow K(U_\beta) | U_\alpha \subset U_\beta\}$$

を考える。ファンクター K は次の continuity property を持つ。

$$K(X) = \varinjlim K(U_\alpha).$$

実は今までの議論は複体の長さを固定して考えてもよい。実際 $n \geq 1$ を固定して

$$C^n(X) := \{[E] \in C(X) | E \text{ は長さ } n\},$$

$$C^n_\emptyset(X) := C^n(X) \cap C_\emptyset(X)$$

とするとき次が成り立つ。

事実 2.5.

$$K(X) \cong C^n(X)/C^n_\emptyset(X)$$

後で特に長さ 1 の場合について考察する。

まだ $K(X)$ の積について何も言ってなかった。以下これについて論じよう。X、Y はともに局所コンパクト Hausdorff 空間とする。E を X 上の複体、F を Y 上の複体とするとき、外部テンソル積 $E \boxtimes F$ を $X \times Y$ 上の複体として定義できる。外部テンソル積を使うことにより、積

$$\begin{array}{ccc} K(X) \otimes K(Y) & \longrightarrow & K(X \times Y) \\ [E] \otimes [F] & \longmapsto & [E \boxtimes F] \end{array}$$

を考えることができる。ここで、特に $X = Y$ として、対角写像

$$\Delta\colon X \longrightarrow X \times X$$

による引き戻し $\Delta^*\colon K(X \times X) \longrightarrow K(X)$ を併せて考えることにより、$K(X)$ 上の積

$$K(X) \otimes K(X) \longrightarrow K(X \times X) \longrightarrow K(X)$$

が定義される。外部テンソル積の定義は与えてないが、これがどんなものであるか、例によって見ることにする。

例 2.1. 上の E、F はともに長さ 1 であるとする。すなわち

$$E\colon 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{\alpha} E^1 \longrightarrow 0$$

$$F\colon 0 \longrightarrow F^0 \xrightarrow{\beta} F^1 \longrightarrow 0$$

このとき、外部テンソル積 $E \boxtimes F$ は

$$E \boxtimes F\colon 0 \longrightarrow E^0 \hat{\otimes} F^0 \xrightarrow{\phi} E^1 \hat{\otimes} F^0 \oplus E^0 \hat{\otimes} F^1 \xrightarrow{\psi} E^1 \hat{\otimes} F^1 \longrightarrow 0$$

で与えられる。ただし、ここで

$$\phi = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \beta$$
$$\psi = -1 \otimes \beta + \alpha \otimes 1$$

とした。この $E \boxtimes F$ の長さは 2 である。E、F に内積を入れて、複体 $E\overline{\boxtimes}F$ を

$$E\overline{\boxtimes}F\colon 0 \longrightarrow E^0\hat{\otimes}F^0 \oplus E^1\hat{\otimes}F^1 \xrightarrow{\theta} E^1\hat{\otimes}F^0 \oplus E^0\hat{\otimes}F^1 \longrightarrow 0$$

で定義する。ここで

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha \otimes 1 & -1 \otimes \beta^* \\ 1 \otimes \beta & \alpha^* \otimes 1 \end{pmatrix}$$

とした、ただし、α^*、β^* はそれぞれ α、β の形式的随伴作用素を表わす。$[E\boxtimes F]$ と $[E\overline{\boxtimes}F]$ は 1 対 1 対応

$$\begin{array}{ccc} F(C(X \times Y))/F(C_\emptyset(X \times Y)) & \xrightarrow{\cong} & F(C^1(X \times Y))/F(C^1_\emptyset(X \times Y) \\ [E \boxtimes F] & \longmapsto & [E\overline{\boxtimes}F] \end{array}$$

により同一視されるものである。

X は局所コンパクト Hausdorff 空間、V、W は X 上の実ベクトル空間とする。積

$$K(V) \otimes K(W) \longrightarrow K(V \times W)$$

と、対角写像 $\Delta\colon X \longrightarrow X \times X$ による引き戻し

$$\Delta^*\colon K(V \times W) \longrightarrow K(V \oplus W)$$

の合成写像として、積

$$K(V) \otimes K(W) \longrightarrow K(V \oplus W)$$

を定義することができる。ここで、特に $W = X$ （０次元ベクトルバンドル）とおくことにより、積

$$K(V) \otimes K(X) \longrightarrow K(V)$$

が得られる。従って、$K(V)$ は $K(X)$-加群の構造を持つ。

改めて X は局所コンパクト Hausdorff 空間、E は X 上の複体

$$E\colon 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{\alpha_0} E^1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E^n \longrightarrow 0$$

とする。$\pi\colon V \longrightarrow X$ を X 上の実ベクトルバンドルとする。各 $i = 1, \cdots n$ に対して準同型写像

$$\alpha_i = \pi^*\alpha^i\colon \pi^*E^i \longrightarrow \pi^*E^{i+1}$$

を考えよう。誘導バンドルの各ファイバーは

$$(\pi^*E^i)_v = E^i_{\pi(v)}, \quad v \in V$$

とみることができることに注意する。

定義 2.9. 準同型写像 $\alpha_i\colon \pi^*E^i \longrightarrow \pi^*E^{i+1}$ が次数 m の同次準同型写像であるとは、

$$\alpha_{i,\lambda v} = \lambda^m \alpha_{i,v} \in \mathrm{Hom}(E^i_{\pi(v)}, E^{i+1}_{\pi(v)}) \quad \forall v \in V, \forall \lambda > 0$$

が成り立つことであるとする。

注意 5.

$$\alpha_{i,v} = \alpha_i|_{(\pi^*E^i)_v}, \quad (\pi^*E^i)_v = E^i_{\pi(v)}$$

注意 6. V に内積を入れて、V の単位球面バンドル $S(V) \subset V$ を考える。α_i が m 次同次であるとする。このとき、α_i は $\alpha_i|_{S(V)}$ によって決定される。すなわち、与えられた準同型写像 $\beta_i\colon \pi^*E^i|_{S(V)} \longrightarrow \pi^*E^{i+1}|_{S(V)}$ に対して、

$$\alpha_i(v) := \lambda^m \beta_i(\tilde{v}), \quad \forall v \in V,\ \exists \lambda > 0,\ \exists \tilde{v} \in S(V) \text{ s.t. } v = \lambda \tilde{v}$$

と α_i を定めると α_i は m 次同次準同型写像となる。

定義 2.10. E を V 上の複体

$$E\colon 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{\alpha_0} \cdots \xrightarrow{\alpha_{i-1}} E^i \xrightarrow{\alpha_i} \cdots$$

とする。E が m 次同次であるとは、各 $i = 1, \cdots$ に対して α_i が m 次同次準同型写像であることと定義する。

さて、${}^mC(V)$ を

$${}^mC(V) := \{[E] \in C(V) | E \text{ は } m \text{ 次同次}\}$$

とし、${}^mC_\emptyset(V) := {}^mC(V) \cap C_\emptyset(V)$ とする。

注意 7. 単位球バンドル $B(V)$ は V に可縮であるから $E|_{S(V)} = \pi^*E|_X$ とみなせる。

注意 8.

$$[E] \in {}^mC_\emptyset(V) \Longrightarrow E\colon \text{完全複体}$$

命題 2.1.

$$K({}^mC(V))/K({}^mC_\emptyset(V)) \cong K(C(V))/K(C_\emptyset(V))$$

証明. E を V 上の複体でその台 L はコンパクトであるとする。このとき 適当な $\rho > 0$ を取って $L \subset B_\rho(V)$ であるようにできる。ただし、 $B_\rho(V)$ は半径 ρ の球バンドルを表わす。まず $[E] \in F({}^mC(V))/F({}^mC_\emptyset(V))$ は $E|_{B_\rho(V)}$ で決定されることを見る。$[E]$、$[F]$ に対し $[E|_{B_\rho(V)}] = [F|_{B_\rho(V)}]$ であるとする。このとき、$B_\rho(V) \times I$ 上の複体 G で $G|_{B_\rho(V)\times\{0\}} \cong E|_{B_\rho(V)}$、$G|_{B_\rho(V)\times\{1\}} \cong F|_{B_\rho(V)}$ を満たすものが存在する。ホモトピー拡張性により、G は $V \times I$ 上の複体 $\overline{G}$ で $\overline{G}|_{V\times\{0\}} \cong E$、$\overline{G}|_{V\times\{1\}} \cong F$ を満たすものに拡張できる。したがって $[E] = [F]$ を得る。X は $B_\rho(V)$ の変形レトラクトであるから、同型写像

$$\gamma_i\colon E^i \cong \pi^*E^i|_X$$

が存在する。このとき、$\gamma_i|_{E^i|_X}$ は同型写像としてよい。ここで $\overline{\alpha}_i = \gamma_{i+1}\alpha_i\gamma_i^{-1}$ とおく。すなわち

$$\begin{array}{ccc} E^i|_{B_\rho(V)} & \xrightarrow{\alpha_i} & E^{i+1}|_{B_\rho(V)} \\ {\scriptstyle\gamma_i}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma_{i+1}}\big\downarrow \\ \pi^*E^i|_X & \xrightarrow{\overline{\alpha}_i} & \pi^*E^{i+1}|_X \end{array}.$$

このとき、$\overline{\alpha}_i|_{S_\rho}$ を V 上のバンドル写像 $\beta_i\colon \pi^*E^i|_X \longrightarrow \pi^*E^{i+1}|_X$ に拡張したい。実際 β_i は

$$\beta_i(v) := |\lambda|^m\overline{\alpha}_i(\overline{v}), \quad \exists\lambda > 0, \exists\overline{v} \in S_{\rho(V)} \text{ s.t. } v = \lambda\overline{v}.$$

で与えればよい。作り方から β_i は m 次同次準同型写像である。したがって、

$$\overline{E}\colon 0 \longrightarrow \pi^*E^0|_X \xrightarrow{\beta_0} \cdots \xrightarrow{\beta_{i-1}} \pi^*E^i|_X \xrightarrow{\beta_i} \cdots$$

とおくと、

$$\begin{array}{ccc} F({}^mC(V))/F({}^mC_\emptyset(V)) & \longrightarrow & F(C(V))/F(C_\emptyset(V)) \\ [E] & \longmapsto & [\overline{E}] \end{array}.$$

以上により命題は示された。 □

これより、我々は

$$K(V) \cong {}^mC^1(V)/{}^mC^1_\emptyset(V)$$

としてよい。最後に $m = 0$ と取れば十分であることを示そう。

命題 2.2. 任意の $a \in K(V)$ は コンパクトな台を持つ次数 0 の同次複体により表現される。

証明. $K(V) = \tilde{K}(V^+)$ であるから、複体

$$0 \longrightarrow F^0 \xrightarrow{\phi} F^1 \longrightarrow 0$$

で、コンパクト集合 $L \subset V$ に対し同型

$$F^i|_{V-L} \xrightarrow{\beta_i} (V - L) \times \mathbb{C}^n, \quad i = 0, 1$$

であって、なおかつ a を表現するものが取れる。$V - L$ 上で $\psi := {\beta_1}^{-1}\beta_0\colon F^0|_{V-L} \longrightarrow F^1|_{V-L}$ とおく。Y を X の相対コンパクト開集合で $\pi(L) \subset Y$ をみたすものとする。このとき $\rho > 0$ で $L \subset B_\rho(V)|_{\overline{Y}}$ を満たすものを取る。$\overline{Y}$ は $B_\rho(V)|_{\overline{Y}}$ の変形レトラクトであるので、同型写像 $\beta_i\colon F^i \longrightarrow \pi^*F^i|_X$ で $\pi^{-1}(\overline{Y} - Y)$ 上で β_i で一致するものを考えることができる。

$$\partial(B_\rho(V)|_{\overline{Y}}) = (S_\rho(V)|_{\overline{Y}}) \cup (B_\rho(V)|_{\overline{Y}-Y})$$

上で $\alpha := \overline{\beta}_1^{\,-1}\psi\overline{\beta}_0$ と定め、これを前の議論と同様にして次数 0 の同次準同型写像として $V_{\overline{Y}}$ 上に拡張する。これは $V|_{\overline{Y}-Y}$ 上ではもとの F に一致し、しかも a を表現するものである。 □

2.3　Thom 準同型

この節において我々は Thom 準同型について論じる。Thom 準同型はベクトルバンドルのコホモロジーと底空間のコホモロジーとをむすびつけるものであり、指数定理においても、最も重要な役割をはたしているものである。ここでは、Thom 準同型の K 理論版について論じる。

まず、準備として K 理論における外積代数の役割について見て行く。V は複素ベクトル空間とする。

$$\begin{cases} E^i := V \times \Lambda^i(V) \\ d_i \colon V \times \Lambda^i(V) \longrightarrow V \times \Lambda^{i+1} \\ \qquad (v,w) \qquad \longmapsto \quad (v, v \wedge w) \end{cases}$$

とおくことにより、V 上の複体

$$\Lambda^*(V) \colon 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d_0} E^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{i-1}} E^i \xrightarrow{d_i} \cdots$$

を得る。ここで、とくに $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ とすると、

$$\begin{array}{rcccccc} \Lambda^*(V) \colon 0 \longrightarrow & V \times \Lambda^0(V) & \xrightarrow{d} & V \times \Lambda^1(V) & \longrightarrow & 0 \\ & (v,w) & \longmapsto & (v, vw) & & \end{array}.$$

d_v は $v \neq 0$ のとき同型写像であって、従って $\Lambda^*(V)$ は

$$\lambda_V := [\Lambda^*(V)] \in K(V)$$

を定める。

注意 9. $K(V) = \tilde{K}(V^+) = \tilde{K}(S^2)$ であり、

$$\lambda_V = [\Lambda^*(V)] = [\Lambda^0(V)] - [\Lambda^1(V)] = [\underline{1}] - [H]$$

は $K(S^2)$ の生成元である。

さて、２つの複素ベクトル空間 V、W に対して、複体として、一般に

$$\Lambda^*(V \oplus W) \cong \Lambda^*(V) \otimes \Lambda^*(W)$$

が成り立つ。これを $V = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$（$n$ 個の和）に帰納的に適用すれば、$\Lambda^*(V)$ は V 上の複体で原点を除いて完全であることがわかる。特に、$\lambda_V = [\Lambda^*(V)]$ は $K(V) = \tilde{K}(S^{2n})$ の生成元である。

より一般に、X は局所コンパクト Hausdorff 空間、V は X 上の複素ベクトルバンドルとする。V に対しても複体として外積代数 $\Lambda^*(V)$ が

$$\begin{cases} \Lambda^*(V) \colon 0 \longrightarrow V \oplus \Lambda^0(V) \xrightarrow{d_0} V \oplus \Lambda^1(V) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{i-1}} V \oplus \Lambda^i(V) \xrightarrow{d_i} \cdots \\ d_i(v,w) := (v, v \wedge w) \end{cases}$$

により定義される。とくに、

$$\mathrm{supp}(\Lambda^*(V)) = X \text{ (零切断)}$$

であるから、X がコンパクトなら

$$\lambda_V := [\Lambda^*(V)] \in K(V)$$

が成り立つ。

注意 10. もちろん、より一般には $\lambda_V \in \tilde{K}(V^+)$ である。

今後、簡単のため $\Lambda^*(V)$ を単に $\Lambda(V)$ と書く。

まず、X はコンパクト Hausdorff 空間、V は X 上の複素ベクトルバンドルとする。

定義 2.11. $K(V)$ は $K(X)$-加群であったことを思い出そう。準同型写像 ϕ を

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\phi} & K(V) \\ x & \longmapsto & \lambda_V x \end{array}$$

により定義する。この ϕ を Thom 準同型と言う。

零切断の包含写像 $i\colon \hookrightarrow K(X)$ に対し、誘導準同型写像

$$i^*\colon K(V) \longrightarrow K(X)$$

を考える。これと、Thom 準同型写像 ϕ に対して

$$\begin{aligned} i^*\phi(x) &= i^*\lambda_V x \\ &= i^*[\Lambda(V)]x \\ &= [i^*(\Lambda(V))]x \\ &= \{\sum(-1)^i[\Lambda^i V]\}x \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、公式

公式 2.1.

$$i^*\phi(x) = \{\sum(-1)^i[\Lambda^i V]\}x \tag{1}$$

を得る。

注意 11. この公式は位相的指数のコホモロジー的計算において基本的な重要な公式である。

次に、X が局所コンパクト空間のばあいを扱う。このとき、$\mathrm{supp}(\Lambda(V)) = X$ はコンパクトとは限らない。しかし、X 上にコンパクトな台を持つ複体 E に対し、$\Lambda(V)\otimes E$ はコンパクトな台を持つから、この場合は Thom 準同型写像 ϕ を

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\phi} & K(V) \\ [E] & \longmapsto & [\Lambda(V)\otimes E] \end{array}$$

により定義することができる。

V、W を X 上の複素ベクトルバンドルとする。$\Lambda(V\oplus W)\cong\Lambda(V)\oplus\Lambda(W)$ であるから、

$$\lambda_V\cdot\lambda_W = \lambda_{V\oplus W}$$

が成り立つ。これにより、Thom 準同型写像 $K(X)\longrightarrow K(V\oplus W)$ は２つの Thom 準同型写像の合成写像

$$K(X) \xrightarrow{\lambda_V} K(V) \xrightarrow{\lambda_W} K(V\oplus W)$$

で与えられることがわかる。これを、Thom 準同型写像の乗法性と言う。この事実の特別な場合への応用を与えておく。X を１点、$V=\mathbb{C}^n$ とする。Thom 準同型は

$$K(X)\cong\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot\lambda_n} \mathbb{Z}\cong K(\mathbb{C}^n)$$

で与えられる。ここで、$\lambda_n := \lambda_{\mathbb{C}^n}$ は $K(\mathbb{C}^n)$ の生成元。Thom 準同型写像の乗法性により、

$$\lambda_n = {\lambda_1}^n$$

が成り立つ。

前にふれたように Bott 周期性 $K(S^2\times X)\cong K(X)$ が成り立つから、Thom 準同型写像は実は同型写像である。

2.4 K_G 理論

ここでは、ベクトルバンドルにコンパクト Lie 群の作用があるような状況を考えよう。この場合に K 理論の代わりに用いられるのが K_G 理論である。G はコンパクト Lie 群、X は コンパクト G-空間とする。

定義 2.12. E が X 上の G-ベクトル空間であるとは、E は G-空間であって、なおかつ X 上の複素ベクトルバンドルであって、次の２つの条件を満たすことであると定義する。

1. $\pi\colon E\longrightarrow X$ を射影とする。$\forall g\in G$ に対して次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

2. $\forall g \in G$、$\forall x \in X$ に対し

$$g\colon E_x \longrightarrow E_{g(x)}$$

注意 12. X が 1 点よりなるとき、E が G-ベクトルバンドルであると言うことは、すなわち、E が G の複素表現空間であると言うことである。

考える対象を G-ベクトルバンドル、G-空間、G-同変準同型写像、G-同変ホモトピー等に限り K 理論と全く同様の構成をすることにより K_G 理論が得られる。念のために K_G 群の定義を与えておこう。空間 $C_G(X)$ は

$$C_G(X) := \{[E]_G | E : X \text{ 上の } G\text{-ベクトルバンドル}\},$$

また、その部分空間 $C_{G,\emptyset}$ は

$$C_{G,\emptyset} := C_G(X) \cap C_\emptyset(X)$$

により定義される。ここで $[\cdot]_G$ は G-ホモトピー同値類を表わす。

定義 2.13.

$$K_G(X) = C_G(X)/C_{G,\emptyset}(X)$$

注意 13. その他の空間 $C_G^m(X)$、${}^mC_G(C)$ 等も同様にして定義される。またこれらを使った $K_G(X)$ の定義も可能である。K_G 理論の詳細については Segal [3] を参照せよ。

K_G 理論でも K 理論と並行して議論を進めることができる。特に、K_G 理論においても Thom 準同型写像を定義できる。V を G-空間 X 上の G-ベクトルバンドルとする。このとき、外積代数の定める G-複体を

$$\lambda_V := [\Lambda(V)]_G \in K_G(V)$$

と書く。

定義 2.14. K_G 理論における Thom 準同型写像 ϕ を

$$\begin{array}{ccc} K_G(X) & \longrightarrow & K_G(V) \\ x & \longmapsto & \lambda_V \cdot x \end{array}$$

により定義する。

最後に K_G 理論に固有の事実をあげておく。

事実 2.6. X が *1* 点よりなるとき、

$$K_G(X) = R(G)$$

が成り立つ。ここで $R(G)$ は G の表現環を表わす。

事実 2.7. G の X 上への作用が自由であるとき、

$$K_G(X) \cong K(X/G)$$

が成り立つ。

事実 2.8. H をコンパクト *Lie* 群とする。$G \times H$ が X に作用し、特に H が自由に作用しているとき、

$$K_{G\times H}(X) \cong K_G(X/H)$$

が成り立つ。

2.5 技術的補題

後の計算で必要となる補題を示しておこう。W を 実 G-加群、$V = W \otimes \mathbb{C}$ をその複素化とする。V 上複素共役をとる写像 ψ を

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & V \\ v & \longmapsto & \overline{v} \end{array}$$

とする。その誘導準同型写像

$$\psi^* \colon K_G(V) \longrightarrow K_G(X)$$

を考える。$K_G(V)$ は λ_V で生成される自由 $R(G)$-加群であるから、$\psi^*\lambda_V$ を知れば ψ^* を決定することができる。

補題 2.1. ψ^* に対して、次が成り立つ。

1. $W = \mathbb{R}^1, G = O(1) \Longrightarrow \psi^* a = -a[V] \ \forall a \in R(G)$
2. $W = \mathbb{R}^2, G = SO(2) \Longrightarrow \psi^* a = a \ \forall a \in R(G)$

証明. 先に、$W = \mathbb{R}^2$、$G = SO(2)$ の場合を扱おう。$u, v \in W$、$0 \leq t \leq 1$ に対して、写像 ψ_t を

$$\psi_t(u + iv) = u + ig_t(v)$$

とする、ただし、ここで $g_t = e^{i\pi t} \in SO(2)$ とした。このとき、ψ_t は $\psi_0 = 1_V$、$\psi_1 = \psi$ なる G-ホモトピーである。従って $\psi^* = 1_{K_{SO(2)}(V)}$ が成り立つ。

次に $W = \mathbb{R}^1$、$G = O(1)$ の場合を考える。まず、$\psi^*\lambda_V + \lambda_V[V] \in K_{O(1)}(V)$ が複体

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \mathbb{C} \oplus V \xrightarrow{\alpha_z} V \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0 \\ \alpha_z = \begin{pmatrix} \overline{z} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \forall z \in V \end{cases}$$

で表現されることを見よう。２つの $O(1)$-同変複体

$$
\begin{array}{ccccccccc}
[d]\colon 0 & \longrightarrow & V^0 & \xrightarrow{d} & V^1 & \longrightarrow & 0 \\
& & v & \longmapsto & v & & \\
[\psi^*]\colon 0 & \longrightarrow & V^0 & \xrightarrow{\psi} & V^1 & \longrightarrow & 0 \\
& & v & \longmapsto & \overline{v} & &
\end{array}
$$

を考えると、

$$\lambda_V[V] + \psi^*\lambda_V = [d] + [\psi^*] = [\alpha_z].$$

ここで

$$[d] + [\psi^*]\colon 0 \longrightarrow \mathbb{C} \oplus V^1 \xrightarrow{d+\psi^*} V^1 \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

である。曲線 $g_t \in GL(2, \mathbb{C})$ を

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるように取る。f_t を

$$f_t := \begin{pmatrix} \overline{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

おくと、

$$f_0 = \begin{pmatrix} \overline{z} & z \\ z & \overline{z} \end{pmatrix} = \alpha_z, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & z\overline{z} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。そこで α_z を単位円周 $S(V)$ 上に制限すると

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。すなわち、$S(V)$ 上 $\alpha_z \simeq \mathrm{const}$ 。従って、

$$\psi^*\lambda_V + \lambda_V[V] = [\alpha_z] = 0$$

を得る。これより、補題の結論が従う。 □

References

[1] M.F. Atiyah, *K*-theory, Benjamin, 1967.

[2] R. Bott, LECTURES ON K(X), Benjamin, 1969.

[3] G.B. Segal, *Equivariant K-theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., Paris, (1968).

3 位相的指数

3.1 位相的指数の定義

G はコンパクト Lie 群、X と Y は微分可能 G-多様体とする。さらに $X \subset Y$ であって $i\colon X \hookrightarrow Y$ を G-埋め込みとする。i に対し $R(G)$-準同型写像

$$i_!\colon K_G(TX) \longrightarrow K_G(TY)$$

を構成することが最初の目標である。

注意 14. i に対して誘導 $R(G)$-準同型写像

$$i^*\colon K_G(TY) \longrightarrow K_G(TY)$$

の方は自然に定義される。$i_!$ は自然な向きとは逆向きの写像である。

接ベクトルバンドル TX と TY は G-多様体で TX は TY の閉 G-部分多様体である。Y に G-不変計量を入れる。このとき、X の Y における G-不変管状近傍 N が存在する。(川久保 [4] 参照。)N を Y における X の法バンドル ν_X と同一視しよう。$\pi\colon TX \longrightarrow X$ を射影とする。

補題 3.1. TX 上の G-ベクトルバンドルとして

$$TN \cong \pi^*(N \oplus N)$$

が成り立つ。

証明. 簡単のため、G 作用のない場合で証明する。まず、$TN|_X \cong TX \oplus \nu_X = TX \oplus N$ は明らかである。N は X に変形収縮するから、$p\colon N \longrightarrow X$ を射影とすると、$TN \cong p^*(TX \oplus N)$ が成り立つ。$p^*(TX \oplus N)$ が TX 上のベクトルバンドルとして $\pi^*(N \oplus N)$ と同型になることを言えばよい。X における $TY|_X$ の自明化近傍系を $\{U_\alpha\}$ とする。すなわち、各 U_α 上で局所自明化

$$TY|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)$$

が成立する。ただし、ここで

$$TX|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \otimes \mathbb{R}^k, \quad N|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \otimes \mathbb{R}^l$$

とした。このとき、$p^*(TX \oplus N)$ は $N|_{U_\alpha}$ 上

$$\xi_\alpha\colon ((p^*(TX \oplus N))|_{N|_{U_\alpha}} \cong N_{U_\alpha} \otimes (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)$$

と言う自明化を持つ。貼り合わせ写像 $\xi_\alpha \circ \xi_\beta^{-1}$ は $N|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ 上

$$\begin{array}{ccccccc} ((U_\alpha \cap U_\beta) & \times & \mathbb{R}^l) & \times & (\mathbb{R}^k & \oplus & \mathbb{R}^l) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{\alpha\beta}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_{\alpha\beta}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle J} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_{\alpha\beta}} \\ ((U_\alpha \cap U_\beta) & \times & \mathbb{R}^l) & \times & (\mathbb{R}^k & \oplus & \mathbb{R}^l) \end{array}$$

で与えられる。ただし、$\phi_{\alpha\beta}$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ の座標変換関数、$J = J(\phi_{\alpha\beta})$ はその Jacobian を、$\psi_{\alpha\beta}$ は N の変換関数を表わす。一方、$\pi^*(N \oplus N)$ の方は $TX|_{U_\alpha}$ 上

$$\eta_\alpha \colon (\pi^*(N \oplus N))|_{TX|_{U_\alpha}} \cong TX|_{U_\alpha} \otimes (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l)$$

と言う自明化を持ち、その貼り合わせ写像 $\eta_\alpha \circ \eta_\beta^{-1}$ は

$$\begin{array}{c} ((U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k) \times (\mathbb{R}^l \oplus \mathbb{R}^l) \\ \quad\big\downarrow \phi_{\alpha\beta} \qquad \big\downarrow J \quad \big\downarrow \psi_{\alpha\beta} \ \big\downarrow \psi_{\alpha\beta} \\ ((U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k) \times (\mathbb{R}^l \oplus \mathbb{R}^l) \end{array}$$

で与えられる。以上により、$\pi^*(N \oplus N)$ と $p^*(TX \oplus N)$ は同型なベクトルバンドルであることがわかる。G 作用がある場合も同様にして示せる。 $\square$

以下、$N \oplus N = N \oplus iN = N \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と考える。これは $N \oplus N$ に複素構造 J を局所的に

$$\begin{array}{ccc} N \oplus N & \xrightarrow{J} & N \oplus N \\ (u_i, v_i) & \longmapsto & (v_i, -u_i) \end{array}$$

で定めたものとして理解される。上の補題より、

$$TN = \pi^*(N \oplus N) = \pi^*(N \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

と考えられる。これにより、TN を TX 上の複素ベクトルバンドルと思うことができる。そこで、Thom 準同型写像

$$\begin{array}{ccc} K_G(TX) & \xrightarrow{\phi} & K_G(TN) \\ x & \longmapsto & \lambda_{TN} x \end{array}$$

を定義することができる。

次の Step は、閉 G-埋め込み $TN \hookrightarrow TY$ から自然準同型写像

$$k_* \colon K_G(TN) \longrightarrow K_G(TY)$$

作ることである。

補題 3.2. X、Y は局所コンパクト G-空間で、X は Y の開 G-集合であるとする。$k \colon X \hookrightarrow Y$ を G-包含写像とするとき $R(G)$-準同型写像

$$k_* \colon K_G(X) \longrightarrow K_G(Y)$$

が存在する。

証明. 簡単のため K 理論で話を進めよう。$\forall a \in K(X)$ に対して、 X 上の複素ベクトルバンドル E、F で $a = [E] - [F]$ となるものがある。そこで、最初から $a = [E] \in K(X)$ のものだけ扱えばよい。さて、$a \in K(X)$ に対して E は X 上のベクトルバンドルで $a = [E]$ かつ、ある X のコンパクト集合 L に対し $E|_{X-L}$ が自明であるとしてよう。そこで L の近傍 N を適当に取って

$$E|_{X-\overline{N}} = (X - \overline{N}) \otimes \mathbb{C}^k$$

としてよい。$\overline{E}$ を

$$\begin{cases} \overline{E}|_{Y-\overline{N}} = (Y - \overline{N}) \otimes \mathbb{C}^k \\ \overline{E}|_N = E|N \end{cases}$$

と定義すると、これは Y 上の複素ベクトルバンドルで $Y - L$ 上自明となる。k_* を

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{k_*} & K(Y) \\ [E] & \longmapsto & [\overline{E}] \end{array}$$

により定義すると、k_* は well-defined で（$\overline{E}$ のホモトピー同値類に依存して一意的に定まる）準同型写像を与えることが容易に確かめられる。この k_* が求めるものである。□

注意 15. k_* は同型写像である。

定義 3.1. Thom 準同型写像 ϕ と自然合成写像 k_* の合成写像

$$i_! = k_* \circ \phi$$

として $R(G)$-準同型写像 $i_!\colon K_G(TX) \longrightarrow K_G(TY)$ を定義する。すなわち、

$$i_!\colon K_G(TX) \xrightarrow{\phi} K_G(TN) \xrightarrow{k_*} K_G(TY)\cdot$$

注意 16. Thom 準同型写像 ϕ は Y の計量及び X の管状近傍 N の取り方によらない。

注意 17. $i_!$ は自然である。すなわち、$X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \overset{j}{\hookrightarrow} Z$ を G-埋め込みとすると、

$$(j\,i)_! = j_! i_!$$

が成り立つ。

証明. Thom 準同型写像の乗法性と k_* が同型写像であることによる。□

Thom 準同型写像についての公式 (1) より次を得る。

公式 3.1.

$$i^* i_!(x) = \{\sum_i (-1)^i \Lambda^i (N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})\} x \quad \forall x \in K_G(TX) \tag{2}$$

注意 18. 誘導準同型写像
$$i^*\colon K_G(TY) \longrightarrow K_G(TX)$$
は実質的には
$$j^*\colon K_G(TN) \longrightarrow K_G(TX)$$
のことである。ただし $j\colon TX \hookrightarrow TN$ は包含写像。

準備が整ったのでいよいよ位相的指数を定義しよう。X はコンパクト微分可能 G-多様体、E は実 G-表現空間とし、$i\colon X \hookrightarrow E$ を G-埋め込みとする。また、P を E の原点とし、$j\colon P \hookrightarrow E$ を埋め込みとする。このとき、次の図式を考えよう。
$$K_G(TX) \xrightarrow{i_!} K_G(TE) \xleftarrow{j_!} K_G(TP) = R(G)$$
注意 19. ここで、TP 上の複素ベクトルバンドル $E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ の外積代数により定義される Thom 準同型写像そのものに一致するから同型写像である。

定義 3.2. 位相的指数
$$\text{t-index}\colon K_G(TX) \longrightarrow R(G)$$
を
$$\text{t-index} = {j_!}^{-1} i_!$$
により定義する。

命題 3.1. 位相的指数 t-index は well-defined である。

証明. t-index が G-埋め込み $i\colon X \hookrightarrow E$ の取り方によらないことを言う。$i'\colon X \hookrightarrow E'$ をもう一つの G-埋め込みとする。このとき、写像 k を
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k} & E \oplus E' \\ x & \longrightarrow & i(x) \oplus i'(x) \end{array}$$
で定義すると、k も G-埋め込みである。G-アイソトピー k_s を
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \oplus E' \\ x & \longrightarrow & i(x) \oplus s i'(x) \end{array}, \quad 0 \leq s \leq 1$$
で定義する。$i_!$、$j_!$ は G-ホモトピーで不変であるから、t-index も G-ホモトピーで不変である。従って、i と k_0 に対し、それぞれを用いて定義した t-index が一致することを示せばよい。N を E における $i(X)$ の法ベクトルバンドルとする。このとき、$N \oplus E'$ は $E \oplus E'$ における $k_0(X)$ の法ベクトルバンドルである。Thom 準同型写像の乗法性により、次の図式は可換である。
$$\begin{tikzcd} K_G(TX) \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_!"'] & K_G(TX) \arrow[d, "k_{0!}"] \\ K_G(TE) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "j_!"'] & K_G(T(E \oplus E')). \arrow[d, "l_!"] \\ K_G(TP) \arrow[r, equal] & K_G(TP) \end{tikzcd}$$

ここで、ψ は Thom 準同型写像で、従って同型写像である。また、$j\colon P \hookrightarrow E$、$l\colon P \hookrightarrow E \oplus E'$ は原点の包含写像である。特に、$j_!$、$l_!$ は同型写像である。図式より、

$$l_!^{-1} k_{0!} = j_!^{-1} \psi^{-1} \psi \, i_! = j_!^{-1} i_!$$

を得る。同様にして、$l_!^{-1} k_{0!} = j'_!{}^{-1} i'_!$ も示される。 □

3.2 de Rham シンボル

後の計算のために技術的な補題を証明しておく。X はコンパクト微分可能 G-多様体とする。$T = TX$ を接ベクトルバンドルとする。以下では TX に計量を入れることにより TX と T^*X を同一視して議論を進める。外積代数 $\Lambda^*(T)$ を考える。

定義 3.3. X の de Rham シンボル $\rho_X \in L(TX)$ を

$$\rho_X := [\Lambda^*(T) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}]$$

で定義する。

注意 20. K_G で考える時も同じ記号を用いることにする。その場合の定義は、

$$\rho_X := [\Lambda^*(T) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}]_G$$

である。

注意 21. $T^c := T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と書くとき、

$$\lambda_{T^c} = [\Lambda^*(T^c)]_G \in K_G(T^c).$$

$i\colon TX \hookrightarrow T^cX$ を自然な包含写像とするとき、

$$\rho_X = i^* \lambda_{T^c}$$

が成り立つ。

特別な場合を考えよう。$X = S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, G = O(N)$ に対し S^n の de Rham シンボル ρ_{S^n} を計算したい。$P \in \mathbb{R}^n$ を原点として、$j\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を包含写像とする。このとき、$j_!(1) \in K_{SO(n)}(T\mathbb{R}^n)$ と ρ_{S^n} の関係を調べよう。

補題 3.3. P^0 を原点 (南極)、P^∞ を無限遠点 (北極) とする。$j^0\colon P^0 \hookrightarrow S^n$、$j^\infty\colon P^\infty \hookrightarrow S^n$ を包含写像とする。$\Theta\colon TS^n \longrightarrow TS^n$ を $\Theta|_{S^n} = 1_{S^n}$、$\Theta_x = \pm 1_{T_xS^n}\colon T_xS^n \longrightarrow T_xS^n$ を満たすバンドル写像とする。このとき、S^n の de Rham シンボル ρ_{S^n} は

$$\rho_{S^n} = j^0_!(1) + \Theta^* j^\infty_!(1) \in K_{O(n)}(TS^n)$$

により与えられる。

証明. S^n を上半平面 B_0^n と下半平面 B_∞^0 の和として

$$S^n = B_0^n \cup B_\infty^n$$

と表わす。S^n への $O(n)$ の作用から誘導される B_0^n と B_∞^n への $O(n)$ の作用は両立しなければばならない。実際 $O(n)$-同変同型

$$TS^n \cong (B_0^n \times \mathbb{R}^n) \cup (B_\infty^n \times \mathbb{R}^n)$$

は次のようにして得られる。$S^{n-1} = \partial B_0^n = \partial B_\infty^n = B_0^n \cap B_\infty^n$ 上で貼り合わせを

$$\begin{array}{ccc} \partial B_0^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h_x} & \partial B_\infty^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) & \longrightarrow & (x, h_x v) \end{array}$$

により与える。ただし、h_x は $x \in \partial B_0^n \subset \mathbb{R}^n$ と見てベクトル x に直交する超平面についての鏡影変換を表わすものとする。h_x により誘導される $\partial B_0^n \times \Lambda^*(\mathbb{C}^n)$ から $\partial B_\infty^n \times \Lambda^*(\mathbb{C}^n)$ への線型変換写像を同じ記号 h_x で表わすと $O(n)$-同変同型

$$\pi^*\Lambda^*(T^c) \cong (B_0^n \times \mathbb{R}^n \times \Lambda^*(\mathbb{C}^n)) \cup (B_\infty^n \times \mathbb{R}^n \times \Lambda^*(\mathbb{C}^n))$$

が得られる。ただし、$\pi\colon TS^n \longrightarrow S^n$ は射影で、貼り合わせは

$$\begin{array}{ccc} \partial B_0^n \times \mathbb{R}^n \Lambda^*(\mathbb{C}^n) & \longrightarrow & \partial B_\infty^n \times \mathbb{R}^n \Lambda^*(\mathbb{C}^n) \\ (x, v, w) & \longrightarrow & (x, h_x v, h_x w) \end{array}$$

で与えられる。ここで、複体の $O(n)$-ホモトピー A_s を

$$\begin{cases} \begin{array}{ccc} B_0 \times \mathbb{R}^n \times \Lambda^i(\mathbb{C}^n) & \longrightarrow & B_0 \times \mathbb{R}^n \times \Lambda^{i+1}(\mathbb{C}^n) \\ (x, v, w) & \longrightarrow & (x, v, (v - isx) \wedge w) \end{array} \\ \begin{array}{ccc} B_\infty \times \mathbb{R}^n \times \Lambda^i(\mathbb{C}^n) & \longrightarrow & B_\infty \times \mathbb{R}^n \times \Lambda^{i+1}(\mathbb{C}^n) \\ (x, v, w) & \longrightarrow & (x, v, (v + isx) \wedge w) \end{array} \end{cases}$$

により定義する。$h_x(x) = -x$ より、これは well-defined で TS^n 上の複体の族 A_s を定める。定義から A_s は次を満たす。

1. $\forall s$ に対し A_s は切断 $Z = \{(x, v) | v = isx \text{ on } B_0^n, v = -isx \text{ on } B_\infty^n\}$ の外で完全。

2. $A_0 = \pi^*\Lambda^*(T^c)$

3. A_1 は P^0 と P^∞ の外で完全。

$Z \overset{\text{diffeo}}{\approx} X$ に注意しておく。1 より、

$$\rho_{S^n} = [A_s]_{O(n)} \in K_{O(n)}(TS^n) \quad 0 \le s \le 1$$

を得る。3 より、

$$T^0 = T(B^n_0 - S^{n-1})$$
$$T^\infty = T(B^n_\infty - S^{n-1})$$

とおくと $A_1|_{T^0}$、$A_1|_{T^\infty}$ はともにコンパクトな台を持ち

$$\alpha_0 = [A_1|_{T^0}]_{O(n)} \in K_{O(n)}(T^0), \quad \alpha_0 = [A_1|_{T^\infty}]_{O(n)} \in K_{O(n)}(T^\infty),$$

を定める。ここで、

$$\begin{array}{ccccc} K_{O(n)}(T(S^n - S^{n-1})) & = & K_{O(n)}(T^0) & \oplus & K_{O(n)}(T^\infty) \\ a & := & a_0 & + & a_\infty \end{array}$$

とおく。包含写像 $k^0 \colon P^0 \hookrightarrow B^n_0 - S^{n-1}$、$k^\infty \colon P^\infty \hookrightarrow B^n_\infty - S^{n-1}$ に対して、自然準同型写像 $k^0_!$、$k^\infty_!$ の定義より

$$a_0 = k^0_!(1), \quad a_\infty = \Theta^* k^\infty_!$$

が成り立つ。閉 G-埋め込み $T(S^n - S^{n-1}) \longrightarrow TS^n$ から誘導される自然準同型写像を考えると、$a, k^0_!(1), k^\infty_!(1)$ はそれぞれ

$$\begin{array}{ccc} K_{O(n)}(T(S^n - S^{n-1})) & \longrightarrow & K_{O(n)}(TS^n) \\ a & \longmapsto & \rho_{S^n} \\ k^0_! & \longmapsto & j^0_!(1) \\ k^\infty_! & \longmapsto & j^\infty_!(1) \end{array}$$

に写される。従って、

$$\rho_{S^n} = j^0_!(1) + \Theta^* j^\infty_!(1)$$

が成り立つ。 □

3.3 特性類

位相的指数のコホモロジーによる表現形を得るためには、特性類の計算が必要である。ここでは、そのための必要な最小限の事項を準備する。特性類とは大雑把に言えば等質空間の分類空間のコホモロジー環である。従って等質空間のコホモロジー環の構造を調べることが重要なことになる。これについては、Borel-Hirzebruch [3] が古典的かつ最も重要な文献である。

G は Lie 群とする。T を G の極大トーラス部分群（極大閉可換部分群）とする。$N_T = \{g \in G | gT = Tg\}$ を G における T の正規化群とする。

定義 3.4. G の Weyl 群を

$$W_T := N_T/T$$

により定義する。

Weyl 群 W_T は極大トーラス群 T 上に次のようにして作用している。$\forall\phi \in W_T$ に対して $n \in N_T$ で $\phi = [n]$ となるものを取る。W_T の T 上への作用は

$$\begin{array}{ccc} W_T \times T & \longrightarrow & T \\ (\phi, t) & \longmapsto & n^{-1}tn \end{array}$$

で与えられる。これは、n の取り方によらない。

(EG, BG, p, G) を普遍 G バンドルとする。すなわち、$EG \xrightarrow{p} BG$ は主 G バンドルであって、BG は各 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して n-連結であるものある。普遍 G バンドルを考える理由のうち恐らく最も重要なものが次の分類定理である。

定理 3.1. X を CW 複体（またはコンパクト Hausdorff 空間）とする。このとき、X から BG への連続写像のホモトピー類全体の集合と、X 上の主 G バンドルの同型類全体の集合は 1 対 *1* に対応する。

系 3.1. P を CW 複体 X 上の主 G バンドルとする。このとき、連続写像 $f\colon X \longrightarrow BG$ で $P \cong f^*(EG)$ を満たすものが存在する。さらに、このような f のホモトピー類は一意的に決まる。

さて、(EG, BG, p, G) を普遍 G バンドルとするとき、$BT := EG/T$ とおくと (EG, BT, π, T) は普遍 T バンドルである。ただし、$\pi\colon EG \longrightarrow BT$ は自然な射影とする。W_T の BT への作用を考えよう。前と同様にして、$\forall\phi = [n] \in W_T, n \in N_T$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} W_T \times B_T & \longrightarrow & BT \\ (\phi, eT) & \longrightarrow & \phi \cdot eT := enT = eTn \end{array}$$

とする。ここで、 $e \in EG$ である。W_T の T 及び BT への作用からコホモロジー環 $\mathrm{H}^*(T)$ 及び $\mathrm{H}^*(BT)$ の上への作用が引き起こされる。

記号 1. $\mathrm{H}^*(BT)^{W_T}$ で $\mathrm{H}^*(BT)$ の W_T 不変部分環を表わす。

ファイバーバンドル

$$G/T \longrightarrow BT \xrightarrow{\rho} BG$$

を考えよう。ここで、ρ は射影とする。ρ より誘導準同型写像

$$\rho^*\colon \mathrm{H}^*(BG) \longrightarrow \mathrm{H}^*(BT)$$

が得られる。ρ 、ρ^* と W_T の作用の間には

$$\rho\phi = \rho, \quad \forall\phi \in W_T$$

$$\mathrm{Im}\rho^* \subset \mathrm{H}^*(BT)^{W_T}$$

と言う関係がある。

例 3.1. 1 次元トーラス $T^1(=U(1)=S^1)$ を考える。T^1 のコホモロジー環は

$$\mathrm{H}^*(T^1)=\Lambda[x]$$

である。ここで、$\Lambda[x]$ は元 x で生成される外積代数を表わす。Künneth の定理を繰り返し適用することにより、n 次元トーラス T^n に対して、そのコホモロジー環が

$$\mathrm{H}^*(T^n)=\Lambda[x_1,\cdots,x_n]$$

で与えられることがわかる。ただし、ここで各生成元 $x_i\in H^1(T^n)$ は j 番目への射入

$$\begin{array}{rccc} i_j\colon T^1 & \longrightarrow & T^n = & T\times\cdots\times T \\ t & \longmapsto & & (0,\cdots,\overset{j}{t},\cdots,0) \end{array}$$

に対し

$$i_j^*(x_i)=\delta_{ij}x$$

を満たすものとして定義される。δ_{ij} は Kronecker のデルタを表わす。また、$\Lambda[x_1,\cdots,x_n]$ は $x_1,\cdots,x_n$ で生成される外積代数を表わす。

注意 22. A を係数環とするコホモロジー環 $\mathrm{H}^1(T^n;A)$ は $\{x_1,\cdots,x_n\}$ を基底とする自由 A 加群である。

上の例から、応用上重要な Lie 群について、そのコホモロジー環の様子がわかる。特に、$G=U(n)$ とすれば、その極大トーラス群は T^n である。T^n は対角行列からなる $U(n)$ の部分群である。Weyl 群 W_{T^n} は $\mathrm{H}^1(T^n;A)=Ax_1\oplus\cdots\oplus Ax_n$ の基底 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 上の置換を引き起こす。

定義 3.5. CW 複体 X 上の主 G バンドルのカテゴリーから CW 複体の A 係数コホモロジー類へのファンクター α が特性類であるとは、α が条件

1. P が X 上の主 G バンドルならば

$$\alpha(P)\in\mathrm{H}^*(X;A)$$

が成り立つ。

2. （自然性）X、X' を CW 複体、P、P' をそれぞれ X、X' 上の主 G バンドルで、$f\colon P\longrightarrow P'$ がバンドル写像であるならば、

$$f^*(\alpha(P'))=\alpha(P)$$

の 2 つを満たすことであると定義する。

注意 23. $\mathrm{H}^*(BG;A)$ の任意の元は特性類とみなせる。

証明. P を CW 複体 X 上の主 G バンドルとすると、分類定理により、連続写像 $f\colon X \longrightarrow BG$ で $f^*(EG) \cong P$ を満たすものが存在する。$\forall c \in \mathrm{H}^*(BG;A)$ に対し、記号 α_c を

$$\alpha_c(P) := f^*c \in \mathrm{H}^*(X;A)$$

で定めると α_c が自然性を持つことは容易に確かめられる。対応 $c \longmapsto \alpha_c$ により $\mathrm{H}^*(BG;A)$ の元を特性類と思うことができる。 □

ファイバーバンドル

$$U(n)/T^n \xrightarrow{\ i\ } BT^n \xrightarrow{\ \rho\ } BU(n)$$

を考える。これを使って、$BU(n)$ のコホモロジー環の構造を調べる。

事実 3.1. G、G' を *Lie* 群とするとき

$$BG \times BG' = B(G \times G')$$

が成り立つ。

この事実を使って BT^n のコホモロジー環が決定される。まず T^1 については

$$\mathrm{H}^*(BT^1) = \mathrm{H}^*(BU(1)) = A[t_1]$$

が成り立つ。ここで $t_1 \in \mathrm{H}^2(T^1)$ は生成元である。上の事実と Künneth の定理を繰り返し使うことにより

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*(BT^n) &\cong \mathrm{H}^*(BT^1 \times \cdots \times BT^1)\\ &\cong \mathrm{H}^*(BT^1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{H}^*(BT^1)\\ &\cong A[t_1, \cdots, t_n], \quad t_i \in \mathrm{H}^2(BT^1)\end{aligned}$$

を得る。

注意 24. transgression $\tau\colon \mathrm{H}^1(T^n) \cong \mathrm{H}^2(BT^n)$ を考える。$\mathrm{H}^1(T^n) = \Lambda[x_1, \cdots, x_n]$ であった。x_i たちと t_i たちは

$$t_i = \tau(x_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

により結びついている。

さて、実際の計算上きわめて有用なのが次の分解原理である。

定理 3.2. （分解原理）

1. $\rho^*\colon \mathrm{H}^*(BU(n)) \longrightarrow \mathrm{H}^*(BT^n)$ は単射であり

$$\mathrm{Im}\rho^* = \mathrm{H}^*(BT^n)^{W_{T^n}} = \mathbb{Z}[\sigma^n, \cdots, \sigma^n]$$

となる。ここで、$\sigma_i = \sigma_i(t_1, \cdots, t_n)$ は i 次基本対称式と表わす。

2. 各 $i=0,1,\cdots,n$ に対し $c_i \in \mathrm{H}^{2i}(BU(n);A)$、$c_0=1$ が存在して

$$\rho^*(\sum_i c_i) = \prod_{j=1}^{n}(1+t_j)$$

が成り立つ。また

$$\mathrm{H}^*(BU(n);A) = A[c_1,\cdots,c_n]$$

が成り立つ。

3. $i^*\colon \mathrm{H}^*(BT^n) \longrightarrow \mathrm{H}^*(U(n)/T^n)$ は全射であり

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*(U(n)/T^n) &\cong \mathrm{H}^*(BT^n)/\mathrm{Im}\rho^* \\ &\cong \mathbb{Z}[t_1,\cdots,t_n]/\langle\sigma_1,\cdots,\sigma_n\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ。

記号 2. $\mathrm{H}^*_G(A)$ で A 係数特性類のなす環を表わす。
先の注意により、対応

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{H}^*(BG;A) & \longrightarrow & \mathrm{H}^*_G(A) \\ c & \longmapsto & \alpha_c\end{array}$$

が存在する。特に $G=T^n$ のとき、この写像は単射準同型写像で

$$\mathrm{H}^*(BT^n;A) \subset \mathrm{H}^*_G(A)$$

と思える。c と α_c を同一視して、単に c と書くことにする。また transgression により $t_i \in \mathrm{H}^2(BT^n)$ と $x_i \in H^1(T^n)$ を同一視して、単に x_i と書くことにする。

事実 3.2.

$$\mathrm{H}^*_{T^n}(A) = A\,[[x_1,\cdots,x_n]]$$

Weyl 群 W_{T^n} は $\mathrm{H}^*_{T^n}$ の生成元 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ の置換を引き起こす。上述より $U(n)$ に対しては

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*_{U(n)}(A) &= A[[x_1,\cdots,x_n]]^{S_n} \\ &= A\,[[c_1,\cdots,c_n]]\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで S_n は $\{x_1,\cdots,x_n\}$ の置換群としての n 次対称群を表わす。下の等号は分解原理による。

定義 3.6. (Chern 類) 主 $U(n)$ バンドルに対して、特性類の環 $\mathrm{H}^*_{U(n)}(A)$ の生成元 $c_i, i=0,1,\cdots,n$ を（A 係数）（普遍）第 i Chern 類と言う。

定義 3.7. X を CW 複体、P を X 上の主 G バンドルとするとき、分類定理により、連続写像 $f\colon X \longrightarrow BU(n)$ で $P \cong f^*(EU(n))$ となるものが存在する。このとき、

$$c_i(P) := f^*c_i \in \mathrm{H}^*(X; A)$$

を P の（A 係数）第 i Chern 類という。係数環 A としては普通 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ 等を用いる。

定義 3.8. X を CW 複体、E を X 上の複素ベクトルバンドルとする。$F(E)$ を E の 直交枠バンドルとする。$F(E)$ は X 上の主 $U(n)$ バンドルである。各 $i = 0, 1, \cdots, n = \mathrm{rank}E$ に対し

$$c_i(E) := c_i(F(E)) \in \mathrm{H}^{2i}(X; \mathbb{Z})$$

を E の第 i Chern 類と言う。

分解原理の帰結として次のことが言える。X を CW 複体、E を X 上の複素ベクトルバンドルとする。$n = \mathrm{rank}E$ とする。このとき、各 $i = 1, \cdots, n$ に対し BT^n 上の 1 次元複素ベクトルバンドル L_i が存在して、条件

$$x_i(E) = c_1(L_i) \in \mathrm{H}^2(X; A)$$

を満たす。さらに、次の公式が成り立つ。

公式 3.2.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} c_i(E) &= \prod_{j=1}^{n}(1 + x_j(E)) \\ &= \prod_{j=1}^{n}(1 + c_1(L_j)) \end{aligned}$$

注意 25. 従って、特性類の計算上 $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ を X 上のバンドルのように思って、$E \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ と考えてよいということが保証される。もちろん、実際に E が 複素直線バンドルの和として $E \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ という分解を持つことは一般には期待できない。

いくつか、関係式を書いておこう。

$$\begin{aligned} c_0(E) &= 1 \\ c_1(E) &= x_1(E) + \cdots + x_n(E) \\ &= c_1(L_1) + \cdots + c_1(L_n) \\ c_2(E) &= x_1(E)x_2(E) + x_1(E)x_3(E) + \cdots + x_{n-1}(E)x_n(E) \\ &= c_1(L_1)c_1(L_2) + c_1(L_1)c_1(L_3) + \cdots + c_1(L_{n-1})c_1(L_n) \\ &\cdots \\ c_n(E) &= x_1(E)\cdots x_n(E) \\ &= c_1(L_1)\cdots c_1(L_n) \end{aligned}$$

定義 3.9. （Chern 多項式、全 Chern 類）ベクトルバンドル E、不定元 t に対する多項式

$$c(E) := \sum_{i=0} c_i(E)t^i \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})[t]$$

を E の Chern 多項式と言う Chern 多項式において $t=1$ とおいたものを E の全 Chern 類と言う。

命題 3.2.

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F) \tag{3}$$

証明. $\mathrm{rank}E = m, \mathrm{rank}F = n$ として、$x_i(E \oplus F) = x_i(E) = c_1(L_i), i = 1, \cdots, m$、$x_j(E \oplus F) = x_j(F) = c_1(L_{m+j}), j = 1, \cdots, n$ とする。また、このとき、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m+n} c_i(E \oplus F)t^i &= \prod_{i=1}^{m+n}(1 + x_i(E \oplus F)t) \\
&= \prod_{i=1}^{m}(1 + x_i(E)t)\prod_{j=1}^{n}(1 + x_{m+j}(F)t) \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i(E)t^i \sum_{j=0}^{n} c_j(E)t^j \\
\therefore \quad c(E \oplus F) &= c(E)c(F)
\end{aligned}$$

□

命題 3.3. E が自明ならば $c(E) = 1$ が成り立つ。

定義 3.10. （Chern 指標）

$$ch := \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} = n + \sum_i x_i + \sum_i \frac{{x_i}^2}{2!} + \cdots \in \mathrm{H}^*_{U(n)}(\mathbb{Q})$$

を主 $U(n)$ バンドルの Chren 指標と言う。

命題 3.4.

$$ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F) \tag{4}$$

証明. $\mathrm{rank}E = m, \mathrm{rank}F = n$ とすると、

$$\begin{aligned}
ch(E \oplus F) &= \sum_{i=1}^{m+n} e^{x_i(E \oplus F)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} e^{x_i(E)} + \sum_{j=1}^{n} e^{x_{m+j}(F)} \\
&= ch(E) + ch(F).
\end{aligned}$$

□

命題 3.5.

$$ch(E\otimes F)=ch(E)ch(F) \tag{5}$$

証明. $\mathrm{rank}E=m,\mathrm{rank}F=n$ とし、仮想的に

$$E\oplus F\cong L_1\oplus\cdots\oplus L_m\oplus L_{m+1}\oplus\cdots\oplus L_{m+n}$$

とする。記号を、

$$\begin{aligned} y_i&=c_1(L_i),\quad i=1,\cdots,m\\ z_j&=c_1(L_{m+j})\quad j=1,\cdots,n\end{aligned}$$

$$x_{(i,j)}=x_{(i,j)}(E\oplus F):=x_{(i,j)}(L_i\otimes L_{m+j})=y_i+z_j$$

と記号を定めると。

$$\begin{aligned} E\otimes F&\cong(L_1\oplus\cdots\oplus L_m)\otimes(L_{m+1}\oplus\cdots\oplus L_{m+j})\\ &=\oplus_{i=1}^m\oplus_{j=1}^n L_i\otimes L_{m+j}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} ch(E\oplus F)&=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n e^{x_{(i,j)}}\\ &=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n e^{y_i}e^{z_j}\\ &=\sum_{i=1}^m e^{y_i}\sum_{j=1}^n e^{z_j}\\ &=ch(E)ch(F)\end{aligned}$$

を得る。 □

命題 3.2、3.3 より $K(X)\quad(K_G(X))$ の元に対しても Chern 多項式を定義することができる。すなわち、$\forall a=[E]-[F]\in K(X)\quad([E]_G-[F]_G\in K_G(X))$ に対して、その Chern 多項式を

$$c(a):=c(E)c(F)^{-1}$$

とおくことにより定義する。また、命題 3.4、3.5 により、Chern 指標 ch は環準同型写像

$$ch\colon K(X)\longrightarrow \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q})$$

を定めることがわかる。

その他の Lie 群 G についても言及しておこう。T を G の極大トーラス群とする。$\rho\colon G \longrightarrow U(n)$ を G の表現で $\rho(T) \subset T^n$ を満たすものとする。誘導準同型写像

$$\hat{\rho}\colon \mathrm{H}^*_{T^n}(A) \longrightarrow \mathrm{H}^*_T(A)$$

に対して

$$y_i := \hat{\rho}(x_i) \in H^*_T$$

を ρ の weight と言う。引き戻しの自然性より

$$\rho^*\colon \mathrm{H}^*_{U(n)}(A) \longrightarrow \mathrm{H}^*_G$$

に対して、

$$\rho^* c = \prod_i (1 + i_i t) \tag{6}$$

$$\rho^* ch = \sum_i e^{y_i}$$

が成り立つ。M を G-加群とする。$M \in R(G)$ とみて、

$$ch(M) := \rho^* ch = \sum e^{y_i}$$

と書くことにすると、環準同型写像

$$\begin{array}{rcl} ch\colon R(G) & \longrightarrow & \mathrm{H}^*_G(\mathbb{Q}) \\ M & \longmapsto & ch(M) \end{array}$$

を得る。このとき、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{ch} & \mathrm{H}^*_G(\mathbb{Q}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ R(T) & \xrightarrow{ch} & \mathrm{H}^*_T(\mathbb{Q}) \end{array} .$$

定義 3.11. (Pontrjagin 類)X を CW 複体、E を X 上の実ベクトルバンドルとする。$n = \mathrm{rank} E$ とする。

$$p_i(E) \in \mathrm{H}^{4i}(X; \mathbb{Z}), \quad i = 0, 1, \cdots$$

を

$$p_i(E) := (-1)^i c_{2i}(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

により定義する。式(6)より、($\rho\colon O(n) \longrightarrow U(m), m = [n/2]$ を考える)

$$\mathrm{H}^*_{O(n)}(A) = A\left[[p_1, \cdots, p_m]\right], \quad m = \left[\frac{n}{2}\right], A = \mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$$

が成り立つ。$p_i(E)$ を E の第 i Pontrjagin 類と言う。

p_i たちは次の関係式を満足する。

$$\sum_i (-1)^i p_i t^{2i} = \prod_{i=1}^{m}(1+x_i t)(1-x_i t) \tag{7}$$
$$= \prod_{i=1}^{m}(1-{x_i}^2 t^2).$$

証明は略す。Borel-Hirzebruch [3] を参照のこと。

最後に Euler 類と Thom 準同型写像について簡単にふれておこう。

定義 3.12. （Euler 類）

$$e := \prod_{i=1}^{n} x_i \in \mathrm{H}^*_{U(n)}(A)$$

を Euler 類と言う。その形から Euler 類は Weyl 群の作用に対して不変である。

注意 26. この定義は本来の Euler 類の定義ではない。

E を有向 CW 複体 X 上の有向実ベクトルバンドルとする。rank$E = n$ とする。$E_0 := E - X$ とする。このとき、$(E_x, E_{0,x}) \simeq (D^n, S^{n-1})$ $\forall x \in X$ より $\mathrm{H}_n(E_x, E_{0,x}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ である。$\mathfrak{o}_x$ を $\mathrm{H}_n(E_x, E_{0,x}; \mathbb{Z})$ の生成元で E の与えられた向きを表わすものとする。このとき、$U_x \in \mathrm{H}^n(E_x, E_{0,x}; \mathbb{Z})$ を $\langle U_x, \mathfrak{o}_x \rangle = 1$ により定める。

$$j_x \colon (E_x, E_{0,x}) \hookrightarrow (E, E_0)$$

を包含写像とする。

定義 3.13. $U \in \mathrm{H}^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ で

$${j_x}^*(U) = U_x$$

を満たすものが存在する。この U を E の Thom 類と言う。

事実 3.3. 各 $i = 0, 1, \cdots$ に対して、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{H}^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z}) \\ \alpha & \longmapsto & \pi^*(\alpha)\, U \end{array}$$

は同型をあたえる。ここで、$\pi \colon E \longrightarrow X$ は射影を表わす。これを *Thom* 同型という。

$i \colon E \hookrightarrow (E, E_0)$ を包含写像とする。本来

$$e(E) := (\pi^*)^{-1} i^*(U)$$

を Euler 類と言うのであった。

事実 3.4. $n=2m$ とする。V を $\mathrm{rank}V=m$ である有向 CW 複体 X 上の複素ベクトルバンドルとする。$E=V_{\mathbb{R}}$ をその基礎実ベクトルバンドルとする。このとき、E は有向ベクトルバンドルで $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}=n$ である。このとき、

$$(\pi^*)^{-1}i^*(U)=c_m(V)=\prod_{i=1}^{m}x_i(V)$$

が成り立つ。

従って、先の定義は妥当なものであることがわかる。

注意 27. $\mathrm{H}^i(E,E_0;A)=\tilde{\mathrm{H}}^i(E^+)$ であるから、$i>0$ ならば、Thom 同型は

$$\psi\colon \mathrm{H}^i(X;\mathbb{Z})\longrightarrow \mathrm{H}^{i+n}(E;\mathbb{Z})$$

である。これは、$\psi(u)=u\psi(1)$ と書くことができる。これによって Euler 類を表わすと $e(E)=i^*\psi(1)$ となる。今 $\dim X=m$, $\mathrm{rank}E=n>0$ と仮定しよう。$[X]\in\mathrm{H}_n(X;\mathbb{Z})$ を X の基本ホモロジー類、$[E]\in\mathrm{H}_{m+n}(E;\mathbb{Z})$ を E の基本ホモロジー類とすると、Thom 同型により、

$$u[X]=\psi(u)[E] \tag{8}$$

が成り立つ。

注意 28. 上の注意において、E を微分可能ベクトルバンドルとしコホモロジー類 u を閉微分形式と思うと、式（8）は

$$\int_X u=\int_E \pi^*(u)\wedge U$$

と書ける。また Thom 同型の別の表現をあたえると

$$\int_E \pi^*u\wedge U=\int_X u\int_{E_x}U_x,\quad \left(\int_{E_x}U_x=1\right)$$

これを普通のコホモロジーの言葉で書くと

$$\psi^{-1}(w)=w/U,\quad \forall w\in\mathrm{H}_{DR}(E;\mathbb{R}).$$

ここで / はスラント積をあらわす, つまり、ψ^{-1} はスラント積、すなわちファイバーに沿う積分で与えられる。

注意 29. 上の状況で

$$\begin{aligned}\psi(e(E))&=\pi^*e(E)\wedge U\\&=U\wedge U\\ \psi^{-1}(U\wedge U)&=e(E)\end{aligned}$$

などが成り立つ。

補足的なことを言ってこの節を終りにする。微分可能な対象について曲率の果たす役割を考える。G をコンパクト Lie 群、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数、T を G の 極大トーラス群 , $\mathfrak{t}$ を T の Lie 代数つまり $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とする。包含写像 $\mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{g}$ から準同型写像

$$S(\mathfrak{g}^*)^G \longrightarrow S(\mathfrak{t}^*)^W$$

が引き起こされる。ここで、W は G の Weyl 群を表わす。また $S(\mathfrak{g}^*), S(\mathfrak{t}^*)$ は対称テンソル代数、すなわちそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$ 上の多項式環を表わす。従って、$S(\mathfrak{g}^*)^G, S(\mathfrak{t}^*)^W$ は、それぞれ G、W の随伴作用により不変な多項式全体を表わす。特に、 $S(\mathfrak{t}^*)$ は $\mathbb{R}$ 上 T の指標群 $\hat{T}$ で生成される多項式環である。従って、

$$S(\mathfrak{t}^*)^W \cong \mathrm{H}^*_G(\mathbb{R})$$

が成り立つ。X を微分可能多様体、P を X 上の（微分可能）主 G バンドルとする。α を P 上の接続とする。$AdP = P \times_G \mathfrak{g}$ を G の随伴作用で P に同伴する $\mathfrak{g}$ をファイバーとするベクトルバンドルとする。α の曲率を $\theta(\alpha)$ とすると $\theta(\alpha) \in \Omega^2(AdP)$ である。特に、$\forall x \in$ において $\theta(\alpha)_x \in \Omega^2_x(X) \otimes \mathfrak{g}$ と思うことができる。次数 k の（随伴）不変多項式 $f \in S(\mathfrak{g}^*)^G$ に対し、$f(\theta(\alpha))$ は X 上の 次数 $2k$ の閉微分形式となる。従って、これは de Rham コホモロジー類を定めている。すなわち、

$$[f(\theta(\alpha))] \in \mathrm{H}^{2k}(X;\mathbb{R}) \quad \forall f \in S(\mathfrak{g}^*)^G.$$

さらに、これは接続 α の取り方によらない。これにより、$S(\mathfrak{g}^*)^G$ の各元は定数倍を除いて１つの特性類に対応しており、

$$S(\mathfrak{g}^*)^G \cong \mathrm{H}^*_G(\mathbb{R})$$

であることがわかる。一般に、微分可能な対称に対しては、$\mathbb{R}$ 係数特性類を曲率からの計算で得られる微分形式の形で書くことが（理論的には）可能である。

3.4 位相的指数の特性類による表現

X はコンパクト多様体、V は X 上の複素ベクトルバンドルとする。K 理論とコホモロジー理論における Thom 同型写像を、それぞれ

$$\phi_V \colon K(X) \longrightarrow K(V)$$
$$\psi_V \colon \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(V;\mathbb{Q})$$

とする。

注意 30. X がコンパクトならば、単位元 $1 \in K(X)$ が存在する。

注意 31. もちろん $\mathrm{H}^*(V;\mathbb{Q}) = \tilde{\mathrm{H}}^*(V^+;\mathbb{Q}) = \tilde{\mathrm{H}}^*(V, V_0;\mathbb{Q}), \quad V_0 = V - X$ である。

Chern 指標 $ch\colon K(V) \longrightarrow \mathrm{H}^*(V;\mathbb{Q})$ を使って、コホモロジー類 $\mu(V) \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q})$ を

$$\mu(V) := \psi_V^{-1} ch\, \phi_V(1) \tag{9}$$

により定義する。ϕ_V、ψ_V はともに自然であるから μ も自然で、従って、対応

$$V \longmapsto \mu(V)$$

は X 上の複素ベクトルバンドルのカテゴリーから X 上の有理係数コホモロジー類全体へのファンクターである。すなわち、μ は１つの特性類を定めるから、

$$\mu \in \mathrm{H}^*_{U(n)}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\,[[c_1, \cdots, c_n]] = \mathbb{Q}[[x_1, \cdots, x_n]]^{S_n}$$

と思える。ここで $n = \dim X$ とした。$i\colon X \longrightarrow V$ を 零切断 として

$$i^*\colon \mathrm{H}^*(V;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q})$$

を制限準同型写像（i の誘導準同型写像）とする。このとき、

$$\begin{aligned} i^*\psi_V(u) &= i^*(u\psi_V(1)) \\ &= ui^*(\psi_V(1)) \\ &= ue(V), \quad \forall u \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q}). \end{aligned} \tag{10}$$

ここで $u = \mu(V)$ とおくと

$$\begin{aligned} \mu(V)e(V) &= i^*\psi_V\mu(V) \\ &= i^*\psi_V{\psi_V}^{-1} ch\, \phi_V(1) \\ &= i^* ch\, \phi_V(1) \\ &= ch\, i^*\phi_V(1) \end{aligned} \tag{11}$$

を得る。

注意 32. 最後の i^* は制限写像 $i^*\colon K(V) \longrightarrow K(X)$。

$\phi_V(1)$ は $K(V)$ の生成元であるから、それは外積代数 λ_V に一致する。すなわち、

$$\lambda_V = \phi_V(1) \in K(V).$$

公式（1)、(2）より、

$$\lambda_{-1}(V) := \sum_i (-1)^i \Lambda^i V$$

と書くことにすると、

$$ch\, i^*\phi_V(1) = ch\, \lambda_{-1}(V),$$

従って、

$$\mu(V)e(V) = ch\, \lambda_{-1}(V) \tag{12}$$

を得る。以下、$\mu = \mu(V), e = e(V), \lambda_{-1} = \lambda_{-1}(V)$ のように略記する。分解原理を使って V の Chern 多項式を

$$c = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i t)$$

と書くことにする。ただし、ここで、$\mathrm{rank} V = n, x_i(V) = c_1(L_i),\ i = 1, \cdots, n$ とした。このとき、

$$\begin{aligned}\lambda_{-1} &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \Lambda^i V \\ &= \otimes_{i=1}^{n}(\underline{1} - L_i).\end{aligned}$$

従って、命題 3.5 により

$$ch(\lambda_{-1}) = \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{x_i}) \tag{13}$$

を得る。一方、Euler 類 e は

$$e = c_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{14}$$

であった。(12)、(13)、(14) より

$$\mu \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{x_i})$$

$$\therefore \mu = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1 - e^{x_i}}{x_i}\right) \tag{15}$$

を得る。ここで、記号 μ_k を次のように定める。(15) を $x_i, i = 1, \cdots, n$ の基本対称式で展開し

$$\mu = \sum_k \mu_k$$

と書く。ここで、

$$\mu_k = \mu_k(c_1, \cdots, c_k)$$

は $c_1, \cdots, c_k$ の多項式である。特に $\mu_0 = (-1)^n$ である。

注意 33. 従って V が自明ならば $\mu = (-1)^n$ である。

非可換な図式

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\phi_V} & K(V) \\ {\scriptstyle ch}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ch} \\ \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\psi_V} & \mathrm{H}^*(V;\mathbb{Q}) \end{array}$$

について考える。ϕ_V、ψ_V、ch はすべて環準同型で、従って、$\forall u \in K(X)$ と 2 つの写像

$$ch,\ {\psi_V}^{-1} ch\, \phi_V \colon K(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Q})$$

に対して、

$$ch(u)\cdot {\psi_V}^{-1} ch\, \phi_V(1) = ch(1)\cdot {\psi_V}^{-1} ch\, \phi_V(u)$$

が成り立つ。

注意 34. 気持ちとしては、

$$\frac{ch(u)}{ch(1)} = \frac{{\psi_V}^{-1} ch\, \phi_V(u)}{{\psi_V}^{-1} ch\, \phi_V(1)}$$

である。

そこで、$ch(1) = 1$ 及び ${\psi_V}^{-1} ch\, \phi_V(1) = \mu(V)$ より、

$${\psi_V}^{-1} ch\, \phi_V(u) = ch(u)\mu(V) \quad \forall u \in K(X) \tag{16}$$

を得る。この式は $\forall u \in K(X, Y)$ に対しても成立する。ここで、(X, Y) はコンパクト対を表わす。

X、Y を微分可能多様体で X はコンパクトであるとする。さらに、埋め込み $i\colon X \hookrightarrow Y$ があるとする。N を i の法ベクトルバンドルとする。N は $i(X)$ の管状近傍と同一視される。補題 3.1 より、$TN \cong \pi^*(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ が成り立つ。ただし、$\pi\colon TX \longrightarrow X$ は射影を表わす。準同型写像

$$i_!\colon K(TX) \xrightarrow{\ \phi\ } K(TN) \xrightarrow{\ k_*\ } K(TY)$$

を思い出そう。ここで、ϕ は Thom 準同型写像、k_* は自然準同型写像である。$V = \pi^*(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ とおいて、$u \in K(TX)$ に式（16）を適用して、

$$ch\, \phi_V(u) = \psi_V(ch\, u \cdot \mu(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})) \tag{17}$$

を得る。ここで、$\mathrm{H}^*(TX)$ は $\mathrm{H}^*(X)$ 加群とみなしている。

注意 35. 任意の多様体 X に対して TX は概複素多様体の構造を持つ。局所的には、$n = \dim X$ として

$$X \approx \mathbb{R}^n, TX \approx T\mathbb{R}^n \approx \mathbb{C}^n$$

と思う。すなわち、概複素構造を

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \approx & \mathbb{C}^n \\ (x,\xi) & \longmapsto & x + i\xi \end{array}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \xi \in T_x$$

で与える。これにより、TX に自然に向きが定まり、従って、TX の基本ホモロジー類 $[TX] \in \mathrm{H}_{2n}(TX;\mathbb{Z})$ が定まる。TX と TY の概複素多様体としての向きは両立することに注意しておく。

式（17）を基本ホモロジー類で評価しよう。ψ_V は同型写像であったから、

$$ch\,\phi_V(u)[TN] = ch\,u \cdot \mu(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})[TX]. \tag{18}$$

一方、自然性により

$$\begin{aligned} ch\,\phi_V(u)[TN] &= ch\,k_*\phi_V(u)[TY] \\ &= ch\,i_!(u)[TY]. \end{aligned} \tag{19}$$

式（18)、(19）より

$$ch\,i_!(u)[TY] = ch\,u \cdot \mu(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})[TX] \tag{20}$$

を得る。ここで、 E を十分次元の大きなユークリッド空間とし、P をその原点として、埋め込み $i\colon X \hookrightarrow E$、$j\colon P \hookrightarrow E$ を考える。$\dim E = n+q$ とする。j に対して、式（20）を適用すると、$\forall v \in K(TP) \cong \mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{aligned} ch\,j_!(v)[TE] &= (-1)^{n+q} ch\,v[TP] \\ &= (-1)^{n+q} v \end{aligned} \tag{21}$$

を得る。ここで、$\mu(TE) = (-1)^{n+q},\ ch\,v = v$ を使った。これより、

$$v = (-1)^{n+q} ch\,j_!(v)[TE] \tag{22}$$

これを使うと $w = j_!(v)$ $(v = {j_!}^{-1}(w))$ とおいて、

$${j_!}^{-1}(w) = (-1)^{n+q} ch\,w[TE] \quad \forall w \in K(TE) \tag{23}$$

を得る。

位相的指数

$$\text{t-index}\colon K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

は

$$\text{t-index} = j_! i_!$$

により定義されていたから、式（20)、(23）より、

$$\begin{aligned} \text{t-index}(u) &= j_! i_!(u) \\ &= (-1)^{n+q} ch\,i_!(u)[TE] \\ &= (-1)^{n+q} ch\,u \cdot \mu(N \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C})[TX] \end{aligned} \tag{24}$$

を得る。これは、最終形ではない。法バンドル N ではなく TX を使って評価したい。式（15）より次の補題が成り立つ。

補題 3.4. TX 上の 2 つの複素ベクトルバンドル E、F に対して

$$\mu(E \oplus F) = \mu(E)\mu(F)$$

が成り立つ。

証明. $p = \mathrm{rank}E, q = \mathrm{rank}F$ とすると、（15）より、

$$\begin{aligned}\mu(E \oplus F) &= \prod_{i=1}^{p+q} \left(\frac{1 - e^{x_i}}{x_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1 - e^{x_i}}{x_i} \right) \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{1 - e^{x_{p+j}}}{x_{p+j}} \right) \\ &= \mu(E)\mu(F).\end{aligned}$$

□

一般に

$$\mu(E) = \pm 1 + \text{高次の項} \in \mathrm{H}^*(X; \mathbb{Q})$$

の形であるから、$\mu(E)$ は可逆元である。特に自明バンドル W に対しては $\mu(W) = (-1)^{\dim W}$ であったから、上の補題を使って、

$$\begin{aligned}(-1)^{p+q} &= \mu(TE \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \\ &= \mu(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \mu(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})\end{aligned}$$

を得る。従って、

$$(-1)^{n+q} \mu(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mu(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{-1}$$

を得る。ここで、特性類 $\mu^{-1} \in \mathrm{H}^*_{U(n)}(\mathbb{Q})$ を

$$\mu^{-1} := \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - e^{x_i}}$$

で定義すると、式（15）より

$$\mu(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{-1} = \mu^{-1}(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \tag{25}$$

が成り立つ。

定義 3.14. （Todd 類）Todd 類 $\mathcal{T} \in \mathrm{H}^*_{U(n)}(\mathbb{Q})$ 及び双対 Todd 類 $\mathcal{T}^* \in \mathrm{H}^*_{U(n)}(\mathbb{Q})$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &:= \prod_i \left(\frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \right) \\ \mathcal{T}^* &:= \prod_i \left(\frac{-x_i}{1 - e^{x_i}} \right)\end{aligned}$$

で定義する。

定義より、

$$\mathcal{T}^*(V) = (-1)^{\mathrm{rank}V}\mu^{-1}(V)$$

が成り立つ。V^* を V の双対バンドルとすると

$$x_i(V^*) = -x_i(V)$$

であるから

$$\mathcal{T}^*(V) = \mathcal{T}(V^*)$$

が成り立つ。V が実ベクトルバンドル E の複素化として $V = E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ と書けるときは $V \cong V^*$ であるから

$$\mathcal{T}(V) = \mathcal{T}^*(V)$$

が成り立つ。従って、式（25）は

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(TX\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}) &= (-1)^n\mathcal{T}^*(TX\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}) \\ &= (-1)^n\mathcal{T}(TX\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}) \end{aligned} \tag{26}$$

と書ける。ファンクター $E \longmapsto \mathcal{T}(E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ は $O(n)$ バンドルの特性類を定める。これを $\mathcal{I}$ と書く。すなわち、

$$\mathcal{I}(E) := \mathcal{T}(E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}).$$

また、これにより、準同型

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*_{U(n)}(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^*_{O(n)}(\mathbb{Q}) \\ \mathcal{T} & \longmapsto & \mathcal{I} \end{array}$$

が定まる。$\mathcal{I}$ を指数類と呼ぶ。$m = [n/2]$ として、$y_1, \cdots, y_m$ を

$$y_i := \hat{\rho}(x_i) \in \mathrm{H}^*_T(\mathbb{Q})$$

により定める。ここで $\rho\colon O(n) \longrightarrow U(m)$、$\hat{\rho}\colon \mathrm{H}^*_{T^m}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}^*_T(\mathbb{Q})$ を考えている。ただし、T は $O(n)$ の極大トーラスとした。前節の議論から、

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \rho^*\mathcal{T} \\ &= \rho^*\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1-e^{-x_i}} \\ &= \rho^*\prod_{i=1}^m \frac{-y_i}{1-e^{y_i}}\rho^*\prod_{i=1}^m \frac{y_i}{1-e^{-y_i}} \end{aligned}$$

を得る。右辺は $y_1^2, \cdots, y_m^2$ の基本対称式であるから、Pontrjagin 類 $p_1, p_2, \cdots$ の多項式としてかける。そこで、

$$\mathcal{I} = \sum_k \mathcal{I}_{k,m}(p_1, \cdots, p_k)$$

の形に展開しておく。ここで $\mathcal{I}_{k,m}$ は重さ k の多項式を表わす。一般に

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \sum_k \mathcal{I}_{k,m}(p_1, \cdots, p_k)\\ &= 1 - \frac{p_1}{12} + \cdots\end{aligned}$$

である。

定義 3.15. X を多様体とする。$p_i(X) := p_i(TX)$ と書くとき、X の指数類 $\mathcal{I}(X)$ を

$$\mathcal{I}(X) := \mathcal{I}(TX) = \sum_k \mathcal{I}_k(p_1(X), \cdots, p_k(X))$$

で定義する。

さて、位相的指数の計算に戻ろう。式（25)、(26）より、

$$\begin{aligned}\text{t-index}\, u &= (-1)^{n+q} ch\, u \cdot \mu(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})[TX]\\ &= ch\, u \cdot \mu^{-1}(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})[TX]\\ &= (-1)^n ch\, u \mathcal{T}^*(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})[TX]\\ &= (-1)^n ch\, u \mathcal{T}(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})[TX]\\ &= (-1)^n ch\, u \mathcal{I}(X)[TX]\end{aligned}$$

を得る。結論をまとめておこう。

定理 3.3. 位相的指数 t-index: $K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$ は

$$\text{t-index}(u) = (-1)^n (ch(u) \mathcal{T}(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))[TX], \quad \forall u \in K(TX) \tag{27}$$

で与えられる。

系 3.2. 位相的指数を指数類を用いて表わすと

$$\text{t-index}(u) = (-1)^n (ch(u) \mathcal{I}(X))[TX], \quad \forall u \in K(TX) \tag{28}$$

となる。

References

[1] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators:* I, Ann. of Math. **87** (1968), 484-530.

[2] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators:* III, Ann. of Math. **87** (1968), 546-604.

[3] A. Borel and F. Hirzebruch, *Charcteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 458-538; **81** (1959), 315-382; **82** (1960), 491-504.

[4] 川久保勝雄, 変換群論, 岩波書店.

4 指数準同型写像

4.1 指数準同型写像の公理系

X はコンパクト微分可能 G-多様体とする。X に対し $R(G)$-準同型写像

$$\mathrm{ind}_G^X\colon K_G(TX) \longrightarrow R(G)$$

を対応させるファンクター

$$(X, G) \overset{\mathrm{ind}}{\longmapsto} \mathrm{ind}_G^X$$

を考える。ind がファンクターであるために、次の条件を要請する。

1. $f\colon X \longrightarrow Y$ が微分可能 G-多様体の間の G-微分同相写像ならば、図式

$$\begin{array}{ccc} K_G(TY) & \xrightarrow{f^*} & K_G(TX) \\ {\scriptstyle \mathrm{ind}_G^Y}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ind}_G^X} \\ R(G) & = & R(G) \end{array}$$

　は可換である。

2. $\phi\colon G' \longrightarrow G$ が Lie 群の間の準同型写像ならば、図式

$$\begin{array}{ccc} K_G(TX) & \xrightarrow{\phi^*} & K_{G'}(TX) \\ {\scriptstyle \mathrm{ind}_G^X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ind}_{G'}^X} \\ R(G) & \xrightarrow{\phi^*} & R(G') \end{array}$$

　は可換である。

定義 4.1. （指数準同型写像）上のファンクター ind が次の公理 (A1)、(A2) を満たすとき ind は指数準同型写像であると言う。

(A1) $X = P$ （1 点）のとき $\mathrm{ind}_G^X = 1_{R(G)}$.

(A2) ind は $i_!$ と可換である。すなわち、$i\colon X \hookrightarrow Y$ を G-埋め込み写像とするとき、図式

$$\begin{array}{ccc} K_G(TX) & \xrightarrow{i_!} & K_G(TY) \\ {\scriptstyle \mathrm{ind}_G^X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ind}_G^Y} \\ R(G) & = & R(G) \end{array}$$

　は可換である。

注意 36. 位相的指数 t-index は (A1)、(A2) を満足する指数準同型写像である。

4.2　指数準同型写像の一意性

命題 4.1. （一意性その１）ファンクター ind が指数準同型写像ならば、それは位相的指数である。すなわち、

$$\mathrm{ind} = \text{t-index}$$

が成り立つ。

証明. X をコンパクト微分可能 G-多様体とする。E を G-加群、E^+ を E の１点コンパクト化とする。G に適当な G-不変計量を入れて、G は E に直交変換として作用しているとしてよい。このとき、E^+ は G-多様体である。$P \in E$ を E の原点とする。G-埋め込み

$$i\colon X \hookrightarrow E, \quad i^+\colon X \hookrightarrow E,$$

が与えられているとする。また、

$$j\colon P \hookrightarrow E, \quad j^+\colon P \hookrightarrow E,$$

を原点の G-埋め込みとする。ind を指数準同型写像とする。このとき、図式

$$\begin{tikzcd}
 & K_G(TE) \arrow[d] & & \\
K_G(TX) \arrow[ur, "i_!"] \arrow[r, "i_!^+"] \arrow[dr, "\mathrm{ind}_G^X"'] & K_G(TE^+) \arrow[d, "\mathrm{ind}_G^{E^+}"] & K_G(TP) \arrow[ul, "j_!"'] \arrow[l, "j_!^+"'] \arrow[dl, "\mathrm{ind}_G^P"] & = R(G) \\
 & R(G) & &
\end{tikzcd}$$

を考える。この図式の上半分は $j_!$、$j_!^+$、$i_!$、$i_!^+$ の自然性により可換、また下半分は公理 (A2) により可換であるから、全体として可換である。一方、公理 (A1) より $\mathrm{ind}_G^P = 1_{R(G)}$。これを使うと、

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_G^X &= \mathrm{ind}_G^P j_!^{-1} i_! \\
&= 1_{R(G)} j_!^{-1} i_! \\
&= j_!^{-1} i_! \\
&= \text{t-index}_G^X
\end{aligned}$$

を得る。 □

注意 37. ここで t-index: $K_G(TX) \longrightarrow R(G)$ を t-index_G^X と書いた。

以上により指数準同型写像は位相的指数に一致することが言えた。従って解析的指数も指数準同型写像の公理 (A1)、(A2) を満たすことを言えば指数定理の証明が完成する訳であるが、解析的指数が (A2) を満たすことを直接言うのは難しい。そこで、(A1)、(A2) に等価でより検証しやすい公理系を準備することにする。

(B1) （切除性）U をコンパクトではない G-多様体、X、X' をコンパクト G-多様体で、$j\colon U \hookrightarrow X$、$j'\colon U \hookrightarrow X'$ をともに開 G-埋め込みとする。このとき、図式

$$\begin{array}{ccc} K_G(TU) & \xrightarrow{j_*} & K_G(TX) \\ {\scriptstyle j'_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ind}_G^X} \\ K_G(TX') & \xrightarrow{\mathrm{ind}_G^{X'}} & R(G) \end{array}$$

は可換である。

注意 38. (B1) を満たすファンクター ind に対し

$$\mathrm{ind}_G^U : K_G(TU) \longrightarrow R(G)$$

を

$$\mathrm{ind}_G^U := \mathrm{ind}_G^X \circ j_*$$

により定義する。(B1) により、これは G-埋め込み $j\colon U \hookrightarrow X$ の取り方によらない。従ってこのとき、任意の G-加群 E に対して

$$\mathrm{ind}_G^E\colon K_G(TE) \longrightarrow R(G)$$

が定義できる。

(B2) （規格化）P を $\mathbb{R}^n$ の原点とする。$j\colon P \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を包含写像とする。このとき、$j_!\colon R(O(n)) \longrightarrow K_{O(n)}(T\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\mathrm{ind} j_!(1) = 1$$

が成り立つ。

(B2') $j\colon P \hookrightarrow \mathbb{R}^1$ を原点の包含写像とする。このとき、$j_!\colon R(O(1)) \longrightarrow K_{O(1)}(T\mathbb{R}^1)$ に対し

$$\mathrm{ind} j_!(1) = 1$$

が成り立つ。また、$j\colon P \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ を原点の包含写像とすると、

$$\mathrm{ind} j_!(1) = 1$$

が成り立つ。

次に、乗法性公理について説明する。X はコンパクト微分可能多様体、H はコンパクト Lie 群とする。P を X 上の主 H バンドルとする。F をコンパクト微分可能 H-多様体とする。このとき、P に同伴するファイバーバンドル Y を

$$Y := P \times_H F$$

とする。

定義 4.2. このとき、 ベクトルバンドル $T(Y/X)$ を

$$T(Y/X) := P\times_H TF$$

で定め、ファイバーに沿う接ベクトルバンドルと言う。

$T(Y/X)$ は X 上の TY の部分バンドルであり、

$$TY = T(Y/X) \oplus \pi^* TX$$

となっている。ここで $\pi\colon Y \longrightarrow X$ は射影を表わす。従って、積（$K(X)$-準同型写像）

$$K(TX) \otimes K(T(Y/X)) \longrightarrow K(TY)$$

を考えることができる。一方、準同型写像

$$K_H(TF) \longrightarrow K_H(P \times TF) \cong K(P\times_H TF) = K(T(Y/X))$$

がある。（Segal [2] 参照。）上の積と組み合わせて、積

$$K(TX) \otimes K_H(TF) \longrightarrow K(TY)$$

を定義することができる。さらに一般に、G はコンパクト Lie 群で、上の P 及び F 上に H の作用と可換になるように作用しているものとすると、上と同様にして準同型写像

$$K_G(TX) \otimes K_G(T(Y/X)) \longrightarrow K_G(TY)$$

及び

$$K_{G\times H}(TF) \longrightarrow K_{G\times H}(P \times TF) \cong K_G(P\times_H TF) = K_G(T(Y/X))$$

を考えることができ、従って、積

$$K_G(TX) \otimes K_{G\times H}(TF) \longrightarrow K_G(TY)$$

を定義することができる。V を $G\times H$-加群とすると、X 上の G-ベクトルバンドル $P\times_H V$ に対して $R(G)$-準同型写像

$$\mu_P\colon R(G\times H) \longrightarrow K_G(X)$$

を考えることができる。これは、図式

$$\begin{array}{ccccc} K_{G\times H} & \longrightarrow & K_{G\times H}(P\times TV) & & \\ \| & & \| & & \\ R(G\times H) & & K_G(P\times_H TV) & \xrightarrow{\text{Thom iso}} & K_G(TX) \end{array}$$

により定義されるものである。

　G、H、P、F を以上の通りとする。

(B3)　（乗法性）$\forall a \in K_G(TX), \forall b \in K_{G\times H}(TF)$ に対して

$$\mathrm{ind}_G^Y(ab) = \mathrm{ind}_G^X(a \cdot \mu_P(\mathrm{ind}_{G\times H}^F(b)))$$

が成り立つ。

注意 39. $ab \in K_G(TY)$

公理（B3）は余りに一般的過ぎて使いにくい、そこで特別な場合として

$$\mathrm{ind}_{G\times H}^F(b) \in R(G) \subset R(G\times H)$$

となっている場合を考えると、μ_P、ind_G^X がともに $R(G)$-準同型写像であるから（B3）は単に

(B3') $\mathrm{ind}_{G\times H}^F(b) \in R(G) \subset R(G\times H)$ ならば

$$\mathrm{ind}_G^Y(ab) = \mathrm{ind}_G^X(a) \cdot \mathrm{ind}_{G\times H}^F(b)$$

が成り立つ。

と書ける。

注意 40. 上の状況において F が1点、$H = \{1\}$ の場合を考える。ファンクター ind が自明でない（$\mathrm{ind} \not\equiv 0$）ならば

$$\mathrm{ind}_G^X(a) \cdot b = \mathrm{ind}_G^X(ab) = \mathrm{ind}_G^X(a) \cdot \mathrm{ind}_G^F(b)$$

であるから

$$\mathrm{ind}_G^P = 1_{R(G)}$$

を得る。従って、（B3'）は（A1）を含んでいる。

さらに簡単な場合を考えよう。

(B3") X、F を コンパクト微分可能 G-多様体とする。$\forall a \in K_G(TX), \forall b \in K_G(TF)$ に対し

$$\mathrm{ind}_G^{X\times F}(ab) = \mathrm{ind}_G^X(a) \cdot \mathrm{ind}_G^F(b)$$

が成り立つ。

（B3"）を満たすファンクター ind を考える。$X_i, i = 1, 2$ を それぞれコンパクト微分可能 $G_i, i = 1, 2$ 多様体とする。$X := X_1 \times X_2$、$G := G_1 \times G_2$ とする。このとき、$\forall a_i \in K_{G_i}(TX_i), i = 1, 2$ に対し（B3"）より公式

$$\mathrm{ind}_G^X(a_1 a_2) = \mathrm{ind}_{G_1}^{X_1}(a_1) \cdot \mathrm{ind}_{G_2}^{X_2}(a_2)$$

が成り立つ。ただし、ここで、積

$$\begin{array}{ccc} R(G_1) \otimes R(G_2) & \longrightarrow & R(G) \\ \mathrm{ind}_{G_1}^{X_1}(a_1)\otimes\mathrm{ind}_{G_2}^{X_2}(a_2) & \longmapsto & \mathrm{ind}_{G_1}^{X_1}(a_1)\cdot\mathrm{ind}_{G_2}^{X_2}(a_2) \end{array}$$

を使った。

注意 41. 明らかに

$$(\mathrm{B3}) \Longrightarrow (\mathrm{B3'}) \Longrightarrow (\mathrm{B3''})$$

である。

命題 4.2. *(B1), (B2'), (B3") $\Longrightarrow$ (B2)*

証明. $U_i, i = 1, \cdots, k$ をユークリッド空間の開集合とし、$a_i \in K_{G_i}(TU_i), i = 1, \cdots, k$ とする。(B1)、(B3")より

$$\mathrm{ind}_{\prod G_i}^{\prod U_i}(\prod a_i) = \prod(\mathrm{ind}_{G_i}^{U_i}(a_i))$$

を得る。特別な場合として、$U_i = \mathbb{R}^{n_i}$、$G_i = O(n_i)$ を考える。$j^i \colon P \hookrightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ を原点の埋め込みとして、

$$a_i = j^i_!(1)$$

とおく。さらに、$n_i = 1$ または 2、$G_i = O(1)$、または $SO(2)$ であるとすると、(B2')より

$$\mathrm{ind}_{G_i}^{U_i}(a_i) = 1$$

である。従って、

$$\mathrm{ind}_{\prod G_i}^{\prod U_i}(\prod a_i) = \prod(\mathrm{ind}_{G_i}^{U_i}(a_i)) = 1 \in R(\prod G_i)$$

を得る。$j_!$ の乗法性より $a = j_!(1) \in K_{O(n)}(T\mathbb{R}^n), n := \prod n_i$ に対して

$$\prod a_i = a|_{\prod K_{G_i}(U_i) \subset K_{O(n)}(T\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ。また、任意の巡回群 $G \subset O(n)$ に対して $G \subset \prod G_i$ であるから

$$\prod a_i = a$$

が成り立つ。従って、

$$1 = \mathrm{ind}_{\prod G_i}^{\prod U_i}(a_i) = \mathrm{ind}_{O(n)}^{T\mathbb{R}^n}(a) \in R(O(n))$$

を得る。従って ind は(B2)を満たす。 □

命題 4.3. *(B1), (B2), (B3') $\Longrightarrow$ (A2)*

証明. $\tilde{F}$ をコンパクト微分可能 $G \times H$-多様体、F を $\tilde{F}$ の $G \times H$-不変開集合とする。このとき、$Y := P \times_H F$ は $\tilde{Y} := P \times_H \tilde{F}$ の開集合である。特に $F = \mathbb{R}^n$、$\tilde{F} = (\mathbb{R}^n)^+$、$H = O(n)$ とする。$j \colon A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を原点の埋め込みとして、$b = j_!(1)$ とする。P は $X = P/H$ 上の主 $O(n)$-バンドルとする。G の $\mathbb{R}^n$ への作用を自明な作用とすると、明らかにこの G 作用

は $O(n)$ 作用と可換である。このとき、$Y = P\times_{O(n)}\mathbb{R}^n$ は X 上の実 G-ベクトルバンドルで、準同型写像

$$\begin{array}{ccc} K_G(TX) & \xrightarrow{i_!} & K_G(TY) \\ a & \longmapsto & ab \end{array}$$

を考えることができる。ただし、$i\colon X \hookrightarrow Y$ は零切断とする。今、(B1)、(B2) より

$$\mathrm{ind}_{O(n)}^{Y}(b) = 1 \in R(O(n))$$

を得る。さらに、(B3') より

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_{O(n)}^{Y}(i_!(a)) &= \mathrm{ind}_{O(n)}^{Y}(ab)\\ &= \mathrm{ind}_{O(n)}^{X}(a)\cdot \mathrm{ind}_{O(n)}^{Y}(b)\\ &= \mathrm{ind}_{O(n)}^{X}(a) \in R(G)\end{aligned}$$

を得る。これは、Y が X 上の実ベクトルバンドルとなっている (A2) の特別な場合になっている。一般に、G-埋め込み $k\colon X \longrightarrow Z$ に対して準同型写像 $k_!\colon K_G(TX) \longrightarrow K_G(TZ)$ は Thom 準同型写像 $j_!\colon K_G(TX) \longrightarrow K_G(TN)$ (ただし $j\colon X \hookrightarrow N$ は管状近傍への埋め込み) と、自然同型写像 $K_G(TN) \longrightarrow K_G(TYZ)$ の合成写像であったから、図式

$$\begin{tikzcd} K_G(TX) \arrow[r, "j_!"] \arrow[dr, "\mathrm{ind}_G^X"'] & K_G(TN) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ind}_G^N"] & K_G(TZ) \arrow[dl, "\mathrm{ind}_G^Z"] \\ & R(G) & \end{tikzcd}$$

を考えることができる。この図式の左半分は上の結果より可換であり、また右半分は (B1) により可換となる。従って、

$$\mathrm{ind}_G^Z(k_!(a)) = \mathrm{ind}_G^X(a)$$

が成り立つ。 □

定理 4.1. (一意性その２) ind を公理 (*A1*)、(*B1*)、(*B2'*)、(*B3'*) を満たすファンクターとすると

$$\mathrm{ind} = \text{t-index}$$

が成り立つ。

証明. 命題 4.1 、4.2、4.3 より直ちに従う。 □

注意 42. 実は (A1) は必要としない。

　最後に (B2') をより簡単な公理に置き換えよう。X をコンパクト微分可能多様体、$\rho_X \in K_G(TX)$ を de Rham シンボルとする。

(B2") **(i)** $\mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}\rho_{S^2} = 2 \in R(SO(2))$.

(ii) $\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}\rho_{S^1} = 1-\xi \in R(SO(2))$. ここで、$\xi\colon O(1) \longrightarrow U(1)$ は標準表現を表わす。

(iii) $\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}j_!(1) = 1 \in \mathbb{Z}$. ここで、$j\colon P \hookrightarrow S^1$ は原点の埋め込みを表わす。

命題 4.4. （*B2"*） $\Longrightarrow$ （*B2'*）

証明. $j^0\colon P^0 \longrightarrow S^n$、$j^\infty\colon P^\infty \longrightarrow S^n$ をそれぞれ原点及び無限遠点の埋め込みとし、$\Theta\colon TS^n \longrightarrow TS^n$ を各ベクトルを (-1) 倍する写像とする。補題 3.3 より

$$\rho_{S^n} = j^0_!(1) + \Theta^* j^\infty_!(1) \in K_{O(1)}(TS^n) \tag{29}$$

が成り立つ。$f\colon S^n \longrightarrow S^n$ を赤道に関する鏡影とすると

$$f^*(\Theta^* j^\infty_!(1)) = \Theta^* j^0_!(1)$$

が成り立つ。ind の自然性より

$$\mathrm{ind}(\Theta^* j^\infty_!(1)) = \mathrm{ind}(\Theta^* j^0_!(1)) \in R(O(n))$$

を得る。従って、(29) より

$$\mathrm{ind}(\rho_{S^n}) = \mathrm{ind}((1+\Theta^*)j^0_!(1))$$

を得る。従って、

$$\mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}(\rho_{S^2}) = \mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}(2j_!(1)) = 2\mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}(j_!(1)) \in R(SO(2))$$

及び

$$\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}(\rho_{S^1}) = \mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}((1-\xi)j_!(1)) = (1-\xi)\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}(j_!(1)) \in R(O(1))$$

を得る。一方、(B2") より

$$2\mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}(j_!(1)) = 2 \in R(SO(2)),$$

$$(1-\xi)\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}(j_!(1)) = 1-\xi \in R(O(1))$$

を得る。そこで、$1-\xi$ の $R(O(1)) = \mathbb{Z}[\xi]/(1-\xi^2)$ における annihilator を考えると、それは $\mathrm{Ann}(1-\xi) = \mathbb{Z}[1+\xi]$ であるから

$$\mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}(j_!(1)) = 1$$

及び

$$\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}(j_!(1)) = 1 + a(1+\xi) \quad \exists a \in \mathbb{Z}$$

を得る。再び（B2”）より

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{ind}_{O(1)}^{S^1} j_!(1) \\ &= 1 + a(1+\xi) \\ &= 1 + 2a \end{aligned}$$

$$\therefore a = 0$$

従って

$$\mathrm{ind}_{O(1)}^{S^1}(j_!(1)) = 1 \in R(O(1))$$

を得る。よって（B2’）が成立する。 □

References

[1] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators:* I, Ann. of Math. **87** (1968), 484-530.

[2] G.B. Segal, *Equivariant K-theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., Paris, (1968).

5　解析的指数

5.1　擬微分作用素

解析的指数 a-index: $K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を定義するためには、楕円型微分作用素だけを考えるだけではダメで、擬微分作用素というより大きなクラスを考える必要がある。この節では、まず擬微分作用素という概念を説明し、さらに、各擬微分作用素に対してそのシンボルを定義するとともに、その性質を論じることにする。個々の基本的命題等の証明は省略する。これらについてはHörmander [3] など専門の文献を参照して欲しい。

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$x=(x_1,\cdots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準座標とする。

定義 5.1. 各整数 m に対し、$S^m(U\times\mathbb{R}^n)$ を $U\times\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数 $p(x,\xi)$ で、U の任意のコンパクト集合 K と、任意の多重指数 α,β に対し、条件

$$\|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\| \le C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad \forall x\in K, \forall\xi\in\mathbb{R}^n$$

を満たすもの全体の集合とする。ここで、D_ξ^α は

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{\alpha_1}\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{\alpha_n}$$

を表わすものとする。また $C_{\alpha,\beta,K}$ は α,β,K 及び p に依存する定数とする。

記号 3. $\mathcal{E}(U)$ で U 上の滑らかな関数全体を、$\mathcal{D}(U)$ で U 上の滑らかな関数でコンパクトな台を持つもの全体を表わす。

各 $p\in S^m(U\times\mathbb{R}^n)$ に対し、線形作用素 $P\colon\mathcal{D}(U)\longrightarrow\mathcal{E}(U)$ を 公式

$$Pu=\frac{1}{(2\pi)^n}\int p(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi, \quad \forall u\in\mathcal{D}(U)$$

により定義する。ここで $\hat{u}$ は u の Fourier 変換

$$\hat{u}(\xi)=\int u(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx$$

を表わす。特に p が x の関数を係数とする ξ の多項式ならば $p\in S^m(U\times\mathbb{R}^n)$ であり、そのとき P は微分作用素になる。

記号 4. 上の P を

$$P=p(x,D)$$

と書くことにする。

定義 5.2. （擬微分作用素）微分可能多様体 X 上の線形作用素 $P\colon\mathcal{D}(X)\longrightarrow\mathcal{E}(X)$ が擬微分作用素であるとは、各局所座標近傍 $U\subset X$ において、$\forall f\in\mathcal{D}(U)$ に対し、ある $p_f\in S^m(U\times\mathbb{R}^n)$ がとれて

$$P(fu)=p_f(x,D)u, \quad \forall u\in\mathcal{D}(U)$$

が成り立つことであると定義する。

記号 5. $L^m(U)$ で、写像 $p\colon \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ であって、$\forall f \in \mathcal{D}(U)$ に対して、ある $p_f \in S^m(U)$ がとれて $p(fu) = p_f(x, D)u\ \forall u \in \mathcal{D}(U)$ が成り立つようなもの全体の空間を表わす。

事実 5.1. $P \in L^m(U)$ であるための必要十分条件は、P が連続かつ

$$p_f(x,\xi) = e^{-i\langle x,\xi\rangle} P(f e^{i\langle x,\xi\rangle}) \in S^m(U) \quad \forall f \in \mathcal{D}(U)$$

となることである。

定義 5.3. $L^m(U)$ の部分クラス $\mathcal{P}^m(U)$ を以下のように定義する。すなわち、$P \in L^m(U)$ が $\mathcal{P}^m$ に属すとは、$p \in S^m(U \times \mathbb{R}^n)$ かつ極限

$$\sigma(p) := \lim_{\lambda\to\infty} \frac{p(x,\lambda\xi)}{\lambda^m}$$

が存在することと定める。また、上の極限が存在するような関数 $p \in S^m(U \times \mathbb{R}^n)$ の全体を $S_0^m(U \times \mathbb{R}^n)$ と書く。

$p \in S_0^m(U \times \mathbb{R}^n)$ に対して、$\sigma(p)$ は $U \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ 上の関数であり、

$$\sigma(p)(x,\lambda\xi) = \lambda^m \sigma(p)(x,\xi)$$

が成り立つ。すなわち、$\sigma(p)$ は ξ に対し m 次同次である。

定義 5.4. （シンボル）擬微分作用素 $P \in \mathcal{P}^m(U)$ に対して、そのシンボル $\sigma(p)$ を

$$\sigma(p)(x,\xi) := \sigma(p_f)(x,\xi), \quad \forall x \in U, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

により定義する。ここで f は x の近傍で 1 であるような関数とする。

注意 43. 上の定義は f の取り方によらない。

注意 44. P が微分作用素

$$P = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$$

であるとき、

$$\sigma(P) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

が成り立つ。これは、第 1 節でのシンボルの定義そのものである。

注意 45. シンボルは $\xi = 0$ の外側で変数 $x,\xi)$ に関する C^∞ 関数である。特に ξ に対しては m 次同次である。

事実 5.2. $L^m(U)$ 及び $\mathcal{P}^m(U)$ は U の自己微分同相写像によって不変である。

これにより、大域的に $L^m(X)$、$\mathcal{P}^m(X)$ を考えることが可能になる。さらに X 上のベクトルバンドル E、F に対して $L^m(X;E,F)$、$\mathcal{P}^m(X;E,F)$ を考えることができる。すなわち、

定義 5.5. 作用素 $P \in C^\infty(\mathrm{Hom}(E,F))$ を局所的に $P=(P_{ij}), 1 \le i \le \mathrm{rank}F, 1 \le j \le \mathrm{rank}E$ と書くことにする。各 P_{ij} が $L^m(U)$、（$\mathcal{P}^m(U)$）に属すとき、P は $L^m(X;E,F)$、（$\mathcal{P}^m(X;E,F)$）に属すと言う。

定義 5.6. $P \in \mathcal{P}^m(X;E,F)$ を局所的に $P=(P_{ij})=(p_{f\ ij})$ と書くことにする。このとき、P のシンボル $\sigma(P)$ を局所的に

$$\sigma(P)=(\sigma(P_{ij}))=(\sigma(p_{f\ ij}))$$

で定義する。

$P \in \mathcal{P}^m(X;E,F)$ とする。$\pi\colon TX \longrightarrow X$ を射影とする。このとき、シンボル $\sigma(P)$ は写像

$$\sigma(P)\colon \pi^*E \longrightarrow \pi^*F$$

を定義する。これは、零切断 TX を除いて滑らかな写像である。これは局所的には次のように与えられる。つまり、$TX|_U \cong U\times\mathbb{R}^n$ の局所座標を (x,ξ) とするとき、$\phi \in C^\infty(\pi^*E)$ に対し、

$$\left(\sigma(P)(\phi)\right)(x,\xi) := \sigma(P)(x,\xi)\phi(x,\xi) \in \pi^*F_{(x,\xi)}$$

によって $\sigma(P)(\phi) \in C^\infty(\pi^*F)$ が定まる。作り方から $\sigma(P)$ は TX の各ファイバー上で m 次同次な行列関数となる。TX に計量を入れて、単位球面バンドル $SX \subset TX$ を考える。$\pi_S\colon SX \longrightarrow X$ を射影とする。上の議論から、$\forall P \in \mathcal{P}^m(X;E,F)$ は滑らかな準同型写像

$$\sigma(P)\colon {\pi_S}^*E \longrightarrow {\pi_S}^*F$$

を定める。

記号 6.

$$Symb^m(X;E,F) := \{\sigma(P) \mid P \in \mathcal{P}^m(X;E,F)\}$$

明らかに

$$Symb^m(X;E,F) = C^\infty(\mathrm{Hom}({\pi_S}^*E, {\pi_S}^*F))$$

が成り立つ。

次に、クラス $\mathcal{P}^m$ に属す擬微分作用素のシンボルの性質を調べよう。

命題 5.1.

1. *$P \in \mathcal{P}^m, Q \in \mathcal{P}^q, f \in \mathcal{D}(X) \Longrightarrow PfQ \in \mathcal{P}^{m+q}$.*
2. *$\sigma(PfQ)=\sigma(P)f\sigma(Q)$.*

注意 46. もし X がコンパクトならば、上の f は必要でない。

命題 5.2. $P \in \mathcal{P}^m(X;E,F) \Longrightarrow P^t \in \mathcal{P}^m(X;E',F')$

ここで Ω を X の体積バンドルとするとき、E、F はそれぞれ $E' = \mathrm{Hom}(E, \Omega)$、$F' = \mathrm{Hom}(F, \Omega)$ を表わす。（双対バンドルではない！）また P^t は P の転置を表わす。

命題 5.3. $\sigma(P^t) = \sigma(P)'$

ここで、 σ' は同型写像 $\mathrm{Hom}(E, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E', F')$ による σ の像を表わす。

さらに、E、F に計量をいれて、P の形式的随伴作用素 P^* について考える。

命題 5.4. $\sigma(P^*) = \sigma(P)^*$

これらの性質を示すのは容易である。（熊ノ郷 [8] 参照。）

次にソボレフ空間の概念について述べる。X を微分可能多様体、E を X 上の滑らかなベクトルバンドルとする。

定義 5.7. $H_s^{loc}(X; E)$ を E の超関数的切断 u であって任意の階数 s 以下の滑らかな微分作用素 $D\colon \mathcal{D}(X; E) \longrightarrow \mathcal{D}(X; \underline{1})$ に対して $u \in L_2^{loc}(X; E)$ となるもの全体の空間を表わす。

注意 47. ここで、L_2^{loc} は局所 2 乗可積分なクラスを表わす。すなわち、 $u \in L_2^{loc}(X; E)$ は任意の X のコンパクト部分集合 K に対し

$$\int_K |Du| dvol < \infty$$

を意味する。

注意 48. $u \in H_s^{loc}(X; E)$ なる条件を局所的に書くと次のようになる。$(x_1, \cdots, x_n)$ を X の局所座標、$(e_1, \cdots, e_k)$ を E の局所枠として、u を $u = \sum_i u_i(x) e_i$ と表わすとき

$$u \in H_s^{loc} \Longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u_i \in L_s^{loc}, \quad \forall \alpha (|\alpha| \leq s).$$

$\{K_\alpha\}$ を X のコンパクト集合の可算個の族で $\bigcup_\alpha K_\alpha = X$ となるものとする。$H_s^{loc}(X; E)$ は可算個のセミノルム

$$\int_{K_\alpha} \sum_{|\alpha| \leq s} |D^\alpha \cdot| dvol$$

によって Frechét 空間となる。

定義 5.8. $H_s^{comp}(X; E) \subset H_s^{loc}(X; E)$ をコンパクトな台を持つ切断全体のなす部分空間とする。

注意 49. $H_s^{comp}(X; E) = \varinjlim_{\alpha} H_s^{loc}(K_\alpha; E|_{K_\alpha})$.

記号 7. $H_{-s}^{loc}(X; E)$ で $H_s^{comp}(X; E')$ の双対空間を、$H_{-s}^{comp}(X; E)$ で $H_s^{loc}(X; E')$ の双対空間を表わす。

X がコンパクトならば $H_s^{comp} = H_s^{loc}$ が成り立つ。従って、このときは単に H_s と表わすことにする。$H_s(X;E)$ は以下で定義されるノルムにより Hilbert 空間になる。E の Hermite 計量と、 Hermite 接続をとって固定する。$s=0$ のときは H_0 の L_2 ノルム

$$\|u\| := \left(\int_X \langle u, u\rangle dvol\right)^{\frac{1}{2}}$$

を考える。$s>0$ のときは次のようにする。$D\colon \mathcal{D}(X;E) \longrightarrow \mathcal{D}(X;E\otimes TX)$ を与えられた Hermite 接続から決まる共変微分とし、これを使って作用素 $\Delta\colon \mathcal{D}(X;E) \longrightarrow \mathcal{D}(X;E)$ を $\Delta := 1 + D^*D$ で定義する。このとき、ノルム $\|\cdot\|_s$ を

$$\|u\|_s := \left(\int_X \langle \Delta^s u, u\rangle dvol\right)^{\frac{1}{2}}$$

により定義する。最後に $s<0$ の場合は $\|\cdot\|_{-s}$ の双対ノルムを考えるものとする。X 及び E にコンパクト Lie 群 G が作用しているときは、X の Riemann 計量と E の Hermite 計量をともに G-不変に選ぶことにより上で定義されたノルムは G-不変であるとしてよい。従ってそのとき、$H_s(X;E)$ は G-不変な概念である。以上、$H_s^{loc}(X;E)$、$H_s^{comp}(X;E)$、$H_s(X;E)$ 等をソボレフ空間と総称する。

さて、次の事実は我々の解析的議論において重要である。

事実 5.3. 任意の m 階擬微分作用素 $P \in \mathcal{P}^m(X;E,F)$ は連続作用素

$$P_s\colon H_s^{comp}(X;E) \longrightarrow H_{s-m}^{loc}(X;F)$$

に拡張される。従って、X がコンパクトならば 、有界作用素

$$P_s\colon H_s(X;E) \longrightarrow H_{s-m}(X;F)$$

に拡張される。

定義 5.9. $Op_s^m = Op_s^m(X;E,F)$ を $H_s^{comp}(X;E)$ から $H_{s-m}^{loc}(X;F)$ への連続線形作用素全体の空間とする。Op_s^m には有界収束位相を入れて考える。

上の事実から、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^m & \longrightarrow & Op_s^m \\ P & \longmapsto & P_s \end{array}$$

が定まる。この写像の像を $\mathcal{P}_s^m$ と書くことにする。X がコンパクトならば Op_s^m は Banach 空間になる。そのときのノルムを $\|\cdot\|_s^m$ と書く。

事実 5.4. X はコンパクトであるとする。このとき

$$\sigma\colon \mathcal{P}_s^m(X;E,F) \longrightarrow Symb^m(X;E,F)$$

は SX 上の sup ノルムに関し連続である。従って、 σ は

$$\sigma_s\colon \overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F) \longrightarrow \overline{Symb^m(X;E,F)}$$

に拡張できる。さらに、σ_s は全射であり、Kerσ_s は H_s から H_{s-m} へのコンパクト作用素全体と一致する。

注意 50. $Symb^m(X;E,F) \cong C^\infty(\mathrm{Hom}(\pi_S^*E,\pi_S^*F))$ であった。従って

$$\overline{Symb^m}(X;E,F) \cong C^0(\mathrm{Hom}(\pi_S^*E,\pi_S^*F))$$

が成り立つ。

定義 5.10. 空間 $Op^m(X;E,F)$ を線形写像 $\mathcal{D}(X;E) \longrightarrow \mathcal{D}(X;F)$ ですべての数 s に対して $Op_s^m(X;E,F)$ 上の作用素に拡張できるもの全体とする。

ソボレフの補題（Adams [1]、Palais [6] 参照）により

$$\mathcal{D}(X;E) = \bigcap_s H_s^{comp}(X;E)$$

$$\mathcal{E}(X;F) = \bigcap_s H_s^{loc}(X;F)$$

が成り立つ。従って、$\forall P \in Op^m$ は連続作用素 $P\colon \mathcal{D}(X;E) \longrightarrow \mathcal{E}(X;F)$ と考えられる。さらに、ソボレフの補題により、各 s に対し埋め込み

$$Op^m \hookrightarrow Op_s^m$$

が得られるが、

$$Op^m \hookrightarrow \prod_s Op_s^m$$

の像は閉であり、従って Op_s^m たちの位相から誘導される位相により Op^m は Frechét 空間になる。

事実 5.5. Op^m は次の意味で局所空間とよばれる。すなわち、作用素 P が $P \in Op^m$ となるための必要十分条件は、X 上のコンパクトな台を持つ任意の C^∞-関数 ϕ,ψ に対して $\phi P\psi \in Op^m$ が成り立つことである。

注意 51. 上の条件は $X \times X$ 上の Schwartz 核全体が超関数の局所空間になるという条件と同値である。すなわち、$\{U_i\}$ を X の局所座標近傍系とするとき

$$P \in Op^m(X) \Longleftrightarrow P|_{U_i} \in Op^m(U_i) \quad \forall i$$

が成り立つ。

事実 5.4 より $\mathcal{P}^m \subset Op^m$ が成り立つ。$\mathcal{P}^m$ の Op^m における閉包を $\overline{\mathcal{P}}^m$ とする。上述の議論により Op^m は局所的、従って $\overline{\mathcal{P}}^m$ も局所的である。一方、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^m & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}}^m \\ P & \longmapsto & P_s \end{array}$$

は位相の定義から連続である。従って、事実 5.5 より, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^m & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}}^s_m \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma_s} \\ \overline{Symb^s} & = & \overline{Symb^s} \end{array}$$

は可換である。

注意 52. σ_s は全射だが、σ はそうではない。

定義 5.11. 擬微分作用素 $P \in \overline{\mathcal{P}^m_s}$ が楕円型であるとは、P のシンボル $\sigma_s(P)$ が可逆であることと定義する。また $P \in \overline{\mathcal{P}^m}$ が楕円型であるとは、そのシンボル $\sigma(P)$ が可逆であることと定義する。

明らかに、次が成り立つ。

命題 5.5.
$$P\text{ が楕円型} \Longleftrightarrow \exists s : P_s\text{が楕円型} \Longleftrightarrow \forall s, P_s\text{は楕円型}$$

X、Y を微分可能多様体、E、F を X 上の滑らかなベクトルバンドル、G を Y 上の滑らかなベクトルバンドルとする。$P\colon \mathcal{D}(X;E) \longrightarrow \mathcal{E}(X;F)$ を連続線形作用素とする。

定義 5.12. P のリフト

$$\tilde{P}\colon \mathcal{D}(X \times Y; E \boxtimes G) \longrightarrow \mathcal{E}(X \times Y; F \boxtimes G)$$

を

$$\tilde{P}(u \otimes v) = Pu \otimes v, \quad \forall u \in \mathcal{D}(X;E), \forall v \in \mathcal{D}(Y;G)$$

により定義する。

注意 53. Op^m の定義から $\tilde{P}$ は連続線形写像として一意に定まる。実際、次が成り立つ。

命題 5.6. 対応 $P \longmapsto \tilde{P}$ は連続写像

$$Op^m(X;E,F) \longrightarrow Op^m(X \times Y; E \boxtimes G, F \boxtimes G)$$

を定める。

証明. Op^m は局所的だから X 及び Y がユークリッド空間の領域であるとして議論してよい。また、すべてのバンドルは自明であるとしてよい。(成分で考えればよいから。)以下、$m=0$ または $m=1$ とする。$P \in Op^m(X)$、$f \in \mathcal{D}(X \times Y)$ とする。$K \subset X$、$L \subset Y$ はともにコンパクト集合とする。$|\alpha|+|\beta| = s-m \geq 0$ とすると。

$$
\begin{aligned}
\int_{K\times L} |D_x^\alpha D_y^\beta \tilde{P} f|^2 dxdy &= \int_L dy \int_K |D_x^\alpha \tilde{P} D_y^\beta f|^2 dx \\
&\leq C \int_L dy \int_K \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|+|\beta|} |D_x^\gamma D_y^\beta f|^2 dx \\
&\leq C \int_L dy \int_K \sum_{|\beta|+|\gamma| \leq s} |D_x^\gamma D_y^\beta f|^2 dx.
\end{aligned}
$$

これは $s \leq m$ に対し

$$\tilde{P} \colon H_s^{comp}(X \times Y) \longrightarrow H_{s-m}^{loc}(X \times Y)$$

が連続であることを示す。従って、

$$
\begin{array}{ccc}
Op^m(X) & \longrightarrow & Op_s^m(X \times Y) \\
P & \longmapsto & \tilde{P}
\end{array}
$$

は連続である。形式的随伴作用素を考えることにより $s \leq 0$ についても同様の結果を得る。$m > 1$ のときの証明は省略する。 □

注意 54. 我々は $m = 0, 1$ のときだけを考えれば十分である。

注意 55. SX 上では m 次同次という概念はない。

注意 56. 一般には $P \in \mathcal{P}^m$ だからといって $\tilde{P} \in \mathcal{P}^m$ とは限らない。

次の命題は我々の議論において本質的である。

命題 5.7. $m > 0$ ならば、$\forall P \in \overline{\mathcal{P}^m}(X; E, F)$ に対して

$$\tilde{P} \in \overline{\mathcal{P}^m}(X \times Y; E \boxtimes G, F \boxtimes G)$$

が成り立つ。さらに、シンボルについて

$$\sigma(\tilde{P}) = \tilde{\sigma}(P)$$

が成り立つ。ただし σ のリフト $\tilde{\sigma}$ は

$$\tilde{\sigma}(e \otimes g, (\xi, \eta)) := \sigma(e, \xi) \otimes g, \quad \forall \xi \in TX, \forall \eta \in TY, \forall e \in E, \forall g \in G$$

により定義される。

証明. $\overline{\mathcal{P}^m}$ は局所的であるから X,Y はともにユークリッド空間の開部分集合 $X = U \subset \mathbb{R}^n, Y = V \subset \mathbb{R}^q$ としてよい。また前の命題の証明と同様に、すべてのバンドルは 1 次元自明バンドルとしてよい。従って、何を示せばよいかと言うと

$$P \in \mathcal{P}^m \Longrightarrow \overline{\mathcal{P}^m}(U \times V)$$

が成立することである。具体的には、$\forall\phi, \forall\psi \in \mathcal{D}(U)$ と $\forall\phi_1, \forall\psi_1 \in \mathcal{D}(V)$ に対して

$$Q := \phi\phi_1\tilde{P}\psi\psi_1 \in \overline{\mathcal{P}^m}(U \times V)$$

となることを言う。まず、族 $R^t \in \mathcal{P}^0(U \times V)$ で $t > 0$ に対して

1. $Q \circ R^t \in \mathcal{P}^m(U \times V)$.
2. $Q \circ R^t \to Q$ in $Op^m(U \times V)$ as $t \to 0$.

となるものを構成する。$t > 0$ に対して、関数の族 $\sigma^t(\xi, \eta)$ を $[0, 1]$ に値を持ち、

1. σ^t は原点を除いて 0 次同次であり、
2. $$\sigma^t = \begin{cases} 1, & |\xi| < t|\eta| \\ 0, & |\xi| < 2t|\eta| \end{cases}$$

となるようにとる。（各 t に対して線形関数として簡単に実現できる。）また、C^∞-関数 $\phi(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ を

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} 0, & |\lambda| \leq 1 \\ 1, & |\lambda| \geq 2 \end{cases}$$

であるものとする。次に $\sigma^t(\xi, \eta)$ と $\phi(\lambda)$ に対して、関数 $\rho^t(\xi, \eta)$ を

$$\rho^t(\xi, \eta) := 1 - \phi(t(|\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2}})\sigma^t(\xi, \eta)$$

により定義する。最後に R^t を ρ^t の Fourier 逆変換により

$$R^t u(x, y) := \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} \int \rho^t(\xi, \eta)\hat{u}(\xi, \eta)e^{i\langle x,\xi\rangle + i\langle y,\eta\rangle} d\xi d\eta$$

により定義する。このとき $Q^t := Q \circ R^t$ は

$$(Q^t u)(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} \int \phi_1(y)\phi(x)p_\psi(x, \xi)\rho^t(\xi, \eta)\widehat{\psi_1 u}(\xi, \eta)d\xi d\eta$$

で与えられる。ρ^t の作り方から $p_\psi\rho^t \in S_0^m(U \times V \times \mathbb{R}^{n+q})$ であり、従って $Q^t \in \mathcal{P}^m(U \times V)$ であることが従う。$m \geq 0$ に対して

$$\frac{D_x^\beta p_\psi(x, \xi)}{(1 + |\xi| + |\eta|)^m}$$

は有界であるので、$Q \in Op^m$ であることが従う。同様にして、

$$\left| \frac{D_x^\beta \{p_\psi(x,\xi)(\rho^t(x,\xi)-1)\}}{(1+|\xi|+|\eta|)^m} \right| < C_\beta t^m$$

より $Q^t - Q \to 0$ in Op^m as $t \to 0$ が従う。シンボルについて考えると

$$\sigma(Q^t) = \phi_1 \phi \sigma(p_\psi)(1-\sigma^t)\psi_1 = \phi_1 \phi \tilde{\sigma}(P)(1-\sigma^t)\psi\psi_1$$

であり、これは $t \to 0$ のとき $\phi_1\phi\tilde{\sigma}(P)\psi\psi_1$ に収束する。シンボルは局所的だから $\sigma(\tilde{P}) = \tilde{\sigma}(P)$ を得る。 □

この節の残りは擬微分作用素とコンパクト Lie 群の作用の関係について説明する。X はコンパクト微分可能多様体、G はコンパクト Lie 群、E、F は X 上の滑らかなベクトルバンドルで、G が X 及び E、F に作用しているとする。このとき G は $\overline{\mathcal{P}^m}(X;E,F)$ 上に作用する。$g \in G$ の $P \in \overline{\mathcal{P}^m}(X;E,F)$ への作用を $g(P)$ と書くことにする。$g(P)$ は $u \in \mathcal{D}(X;E)$ に対して

$$g(P)u = gPg^{-1}u$$

と書ける。

命題 5.8. $P \in \overline{\mathcal{P}^m}(X;E,F)$ を1つとって固定する。このとき、写像

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}^m} \subset Op^m \\ g & \longmapsto & g(P) \end{array}$$

は連続である。

証明. G の作用はすべてユニタリ的であるとしてよい。従って $\overline{\mathcal{P}^m}$ は $\mathcal{P}^m$ の一様収束閉包である。従って $P \in \mathcal{P}^m$ に対して証明すれば十分である。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする。$A \in \mathfrak{g}$ とする。A_E、A_F をそれぞれ A の E、F 上への作用により定まる E、F 上の 1 階微分作用素とする。A_E、A_F に対して、そのシンボルは

$$\begin{aligned} \sigma(A_E)_x\xi &= A(\xi)1_E \\ \sigma(A_F)_x\eta &= A(\eta)1_F, \quad \xi,\eta \in T_xX, x \in X \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、$A(\xi)$ 及び $A(\eta)$ は X 上の A により定義される左不変ベクトル場 A_x と $\xi,\eta \in T_xX$ との内積を表わす。従って、

$$\sigma(P)\sigma(A_E) = \sigma(A_F)\sigma(P)$$

であることがわかる。$PA_E - A_FP \in \mathcal{P}^m$ より、正数 $C_s > 0$ で

$$\|PA_E - A_FP\|_s^m < C_s$$

を満たすものを取れる。次に、$g_t := \exp(tA) \in G$ として、$\forall u \in \mathcal{D}(E)$ に対して

$$f_t := g_t(P)u = \exp(tA_F) \circ P \circ \exp(-tA_E)u$$

とおく。G の作用はユニタリだったから

$$\begin{aligned}\left\|\frac{df_t}{dt}\right\|_{m-s} &= \|\exp(tA_F) \circ (PA_E - A_F P) \circ \exp(-tA_E)u\| \\ &= C_s\|u\|_s\end{aligned}$$

を得る。従って、

$$\|f_t - f_0\|_{m-s} < C_s t\|u\|_s$$

を得る。これは、$P \longmapsto g(P)$ の $1 \in G$ における連続性を意味する。各 g は $\overline{\mathcal{P}^m}$ に連続に作用するので、結局、すべての g に対し上の対応は連続であることがわかる。 □

注意 57. $P \in \overline{\mathcal{P}^m}$ とする。dg を G の Haar 測度とする。このとき、

$$Av(P) := \int_G g(P)dg \in \overline{\mathcal{P}^m}$$

が成り立つ。ただし dg は $\int_G dg = 1$ と規格化しておく。

注意 58. $\sigma\colon \overline{\mathcal{P}^m} \longrightarrow \overline{Symb^m}$ は連続であったから、

$$\sigma(Av(P)) = Av(\sigma(P))$$

を得る。

5.2　解析的指数の定義

X はコンパクト微分可能多様体、E と F を X 上の滑らかなベクトルバンドルとする。

定義 5.13. $P \in \mathcal{P}^m(X;E,F)$ が m 階楕円型であるとは、P のシンボル $\sigma(P)$ が可逆であることと定義する。

注意 59. すなわち、$\forall x \in X, \xi \in T_xX$ に対し $\sigma(P)(x,\xi)$ は正則行列。

事実 5.6. 擬微分作用素 $P \in \mathcal{P}^m(X;E,F)$ が楕円型であるとき、擬微分作用素 $Q \in \mathcal{P}^{-m}(X;F,E)$ で $PQ - 1_F$ と $QP - 1_E$ がともに滑らかな積分核を持つようなものを構成できる。従って、$PQ - 1_F$ と $QP - 1_E$ はコンパクト作用素である。（Hörmander）

この事実から、次の楕円型擬微分作用素についての基本的命題が導かれる。

命題 5.9. $P \in \mathcal{P}^m(X;E,F)$ を楕円型擬微分作用素とする。このとき、ImP は閉集合であり、Ker$P$ と Coker$P$ はともに有限次元である。さらに、方程式 $Pu = 0$ の解 u 及び、その双対 u^* は C^∞-級である。

注意 60. この命題により、$\mathrm{Ker}P \cong \mathrm{Ker}P_s, \mathrm{Coker}P \cong \mathrm{Coker}P_s \cong \mathrm{Ker}P_s^*, \forall s$ が成り立つ。

定義 5.14. 楕円型擬微分作用素 $P \in \mathcal{P}^m(X; E, F)$ に対して、その指数 $\mathrm{index}P$ を

$$\mathrm{index}P := \dim \mathrm{Ker}P - \dim \mathrm{Coker}P$$

で定義する。

注意 61. $\mathrm{index}P = \mathrm{index}P_s, \forall s$

事実 5.4 より、$P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X; E, F)$ が可逆なシンボルを持つとき、$Q_{s-m} \in \overline{\mathcal{P}_{s-m}^{-m}}(X; F, E)$ で $QP - 1_E$、$PQ - 1_F$ がともにコンパクト作用素となるものがある。従って、P は H_s から H_{s-m} への Fredholm 作用素になる。すなわち、

$$\dim \mathrm{Ker}P < \infty,\ \dim \mathrm{Coker}P < \infty.$$

従って、すべての $P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}$ に対して

$$\mathrm{index}P = \dim \mathrm{Ker}P - \dim \mathrm{Coker}P$$

が定義できる。Hilbert 空間における Fredholm 作用素の指数は連続、つまり局所定数関数であり、従ってコンパクト作用素を加えても変わらないから、次の命題を得る。

命題 5.10. $P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}$ を可逆なシンボルを持つ擬微分作用素とする。P の指数 $\mathrm{index}P$ は階数 m の可逆シンボルを持つ作用素のなす $\overline{\mathcal{P}_s^m}$ の部分空間における P のホモトピー類だけによって決まる。

命題 5.11. $P \in \mathcal{P}_m, Q \in \mathcal{P}^n$ を楕円型擬微分作用素とする。SX 上で $\sigma(P) = \sigma(Q)$ が成り立つとき、

$$\mathrm{index}P = \mathrm{index}Q$$

が成り立つ。

証明. SX 上 $\sigma(P) = \sigma(Q)$ であるから、$\sigma(P)/\sigma(Q) \colon \pi^*E \longrightarrow \pi^*E$ は自己随伴作用素である。そこで、自己随伴作用素 $R \colon \mathcal{D}(X; E) \longrightarrow \mathcal{D}(X; E)$ が存在して、

$$\sigma(P) = \sigma(P)\sigma(Q)$$

が成り立つ。従って、

$$\mathrm{index}P = \mathrm{index}Q + \mathrm{index}R$$

を得るが、自己随伴作用素の指数は 0 であるから $\mathrm{index}R = 0$、よって

$$\mathrm{index}P = \mathrm{index}Q$$

を得る。 □

次の命題は明らかであろう。

命題 5.12. $P \in \overline{\mathcal{P}^m} X; E, F), Q \in \overline{\mathcal{P}^m}(X; E', F')$ が、ともに可逆なシンボルを持つとする。このとき、$P \oplus Q \in \overline{\mathcal{P}^m}(X; E \oplus E', F \oplus F')$ に対して、

$$\mathrm{index} P \oplus Q = \mathrm{index} P + \mathrm{index} Q$$

が成り立つ。

命題 5.13. 連続線形楕円型作用素 $P \colon \mathcal{D}(X; E) \longrightarrow \mathcal{D}(X; F)$ が E から F へのバンドル同型写像を誘導するならば

$$\mathrm{index} P = 0$$

が成り立つ。

命題 5.14. 任意の楕円型擬微分作用素 $P \in \overline{\mathcal{P}^m_s}(X; E, F)$ は $K(X)$ の仮想バンドル a を1つ定める。これは P のシンボル $\sigma(P)$ のホモトピー類だけに依存して決まる。逆に任意の仮想バンドル $a \in K(TX)$ に対し、a はある m 階擬微分作用素 $P' \in \overline{\mathcal{P}^m_s}(X; E, F)$ のシンボル類 $\sigma(P')$ として実現される。もし、$a = \sigma(P) = \sigma(P'),\ a \in K(TX), P, P' \in \overline{\mathcal{P}^m_s}(X; E, F)$ ならば $P \simeq P'$ が成り立つ。

証明. $P \in \overline{\mathcal{P}^m_s}(X; E, F)$ が楕円型であるとすると、そのシンボル $\sigma(P)$ は $\pi_S^* E$ から $\pi_S^* F$ へのバンドル同型写像を定める。従って TX 上の複体

$$0 \longrightarrow \pi^* E \xrightarrow{\sigma(P)} \pi^* F \longrightarrow 0$$

を得る。これは零切断を除いて完全な長さ 1 の m 次同次複体である。従って、$K(TX)$ の元 a を定める。命題 2.1 の証明からわかるように a は $\sigma(P)|_{SX}$ のホモトピー類にのみ依存して定まる。

記号 8. この a をシンボルと同じ記号 $\sigma(P)$ で表わし、シンボル類と言う。

逆に、任意の $a \in K(TX)$ は TX 上のある長さ 1 の m 次同次複体

$$0 \longrightarrow \pi^* E \xrightarrow{d} \pi^* F \longrightarrow 0$$

のホモトピー類として実現される。このとき、

$$d|_{\pi_S^* E} \in C^\infty(\mathrm{Hom}(\pi_S^* E, \pi_S^* F)) \cong Symb^m(X; E, F)$$

であるから、

$$Pu(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int \|\xi\|^m d|_{\pi_S^* E} \left(x, \frac{\xi}{\|\xi\|} \right) \hat{u}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi, \quad \forall u \in \mathcal{E}(X; E)$$

と定義することにより、$P \in \mathcal{P}^m_s(X; E, F)$ の元が定義できる。作り方から P のシンボルは

$$\sigma(P) = d|_{\pi_S^* E}$$

で与えられる。従って $a = \sigma(P)$ である。 □

命題 5.10、5.11 より $P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}$ の指数も $\sigma(P)$ のホモトピー類のみに依存して定まることがわかり、さらに、命題 5.12、5.13 そして命題 5.14 により、対応

$$\begin{array}{ccc} K(TX) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \sigma(P) & \longmapsto & \mathrm{index}P \end{array}$$

は準同型写像となることがわかる。

定義 5.15. （解析的指数）準同型写像 a-index: $K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を対応

$$\begin{array}{ccc} K(TX) & \xrightarrow{\text{a-index}} & \mathbb{Z} \\ \sigma(P) & \longmapsto & \mathrm{index}P \end{array}$$

により定義し、解析的指数と呼ぶ。

注意 62. 解析的指数の定義は m、s の取り方によらない。m によらないことは命題 2.1、事実 5.4 からわかる。また s の取り方によらないことは $\mathcal{P}^m$ が $\overline{\mathcal{P}_s^m}$ で稠密であることからわかる。

$H_s \subset H_{s+1}$、及び $H_{m-s} \subset H_{m-s-1}$ から次を得る。

命題 5.15. $P \in \overline{\mathcal{P}^m}$ を楕円型擬微分作用素とする。このとき、方程式 $Pu = 0$ の解 u は $C_0^\infty(X; E)$ に属す。同様にして、方程式 $P^* w = 0$ の解は $C_0^\infty(X; F)$ に属す。従って、すべての s に対して

$$\mathrm{index}P_s = \mathrm{index}P = \dim \mathrm{Ker}P - \dim \mathrm{Coker}P$$

が成り立つ。

次に、コンパクト Lie 群 G の作用があるときに解析的を定義しよう。$P \in \overline{\mathcal{P}^m}$ ならば $Av(P) \in \overline{\mathcal{P}^m}$ であった。また、シンボルは Haar 測度による積分と交換可能であるから

$$\sigma(Av(P)) = Av(\sigma(P))$$

が成り立つ。従って特に、$\sigma(P)$ が G-不変ならば

$$\sigma(Av(P)) = \sigma(P)$$

が成り立つ。$P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}$ のときも同様である。

定義 5.16. H、H' を G の作用する Hilbert 空間とする。$P\colon H \longrightarrow H'$ を G-不変 Fredholm 作用素とする。このとき、P の指数を

$$\mathrm{index}P := [\mathrm{Ker}P]_G - [\mathrm{Coker}P]_G \in R(G)$$

により定義する。

補題 5.1. 上で定義した指数 index$P$ は well-defined である。

証明. index$P$ が P のノルムによる位相に関して局所定数であることを示せばよい。$V \subset H$ を G-不変閉部分空間で有限余次元かつ $V \cap \mathrm{Ker}P = \{0\}$ なるものとする。（例えば、このような V として $(\mathrm{Ker}P)^{\perp}$ をとればよい。）P についての仮定から、P から写像 $\tilde{P}\colon H/V \longmapsto H'/P(V)$ が誘導される。ここで、完全系列よりなる図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H/V & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{P}} & & \\ 0 & \longrightarrow & P(V) & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & H'/P(V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を考える。この図式は可換であるから、

$$\mathrm{Ker}P \cong \mathrm{Ker}\tilde{P}, \quad \mathrm{Coker}P \cong \mathrm{Coker}\tilde{P}$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} \mathrm{index}P &= [\mathrm{Ker}P]_G - [\mathrm{Coker}P]_G \\ &= [\mathrm{Ker}\tilde{P}]_G - [\mathrm{Coker}\tilde{P}]_G \\ &= [H/V]_G - [H'/P(V)]_G \end{aligned}$$

を得る。ここで、写像

$$\begin{array}{ccc} (P(V))^{\perp} \oplus V & \longrightarrow & H' \\ x \oplus y & \longmapsto & x + Qy \end{array}$$

を考える。もし $P = Q$ ならば、これは同型写像である。従って、$\|P - Q\|$ が十分小さければ、やはり同型写像を定めることがわかる。このとき、Q は Fredholm 写像で $V \cap \mathrm{Ker}Q = \{0\}$ かつ $(P(V))^{\perp} \cong H'/Q(V)$ を満たす。Q から前と同様にして、$\tilde{Q}\colon H/V \longmapsto H'/Q(V)$ が誘導されるが、このとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{index}Q &= \mathrm{index}\tilde{Q} \\ &= [H/V]_G - [H'/Q(V)]_G \\ &= [H/V]_G - [(P(V))^{\perp}] \\ &= \mathrm{index}P \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、index$P \in R(G)$ は局所定数である。 □

この命題により、G が作用しているときにも解析的指数が定義される。

定義 5.17. 準同型写像 a-index: $K_G(TX) \longrightarrow R(G)$ を

$$\begin{array}{ccc} K_G(TX) & \xrightarrow{\text{a-index}} & R(G) \\ \sigma(P) & \longmapsto & \mathrm{index}P \end{array}$$

により定義する。これを解析的指数と呼ぶ。

5.3 解析的指数の切除性と規格化

この節と次の節で解析的指数 a-index が抽象的指数準同型写像の公理系を満たすことを示す。この節では a-index が切除性公理（B1）と規格化公理（B2”）を満たすことを示す。次節では乗法性公理（B3) を満たすことを示す。これらの公理と公理（A1）が示されれば 4.2 節の議論から

$$\text{a-index} = \text{t-index}$$

であることが従う。これにより、Atiyah-Singer の指数定理が証明されたことになる。

補題 5.2. 解析的指数 a-index は公理（*A1*）を満たす。

証明. G 多様体 X がただ 1 点よりなるとする。このとき、楕円型作用素 P とは、つまり、有限次元 G-加群 V、W の間の G-線形写像のことである。$\forall a \in K_G(TX) = R(G)$ は $[V]_G - [W]_G = [\sigma(P)]$ と書ける。従って、

$$\text{a-index}([\sigma(P)]_G) = \text{index}P = [V]_G - [W]_G = [\sigma(P)]_G$$

を得る。すなわち、 $\text{a-index} = 1_{R(G)}$. よって（A1）が示された。 □

補題 5.3. 解析的指数 a-index は切除性公理（*B1*）を満たす。

証明. X をコンパクト微分可能 G-多様体とする。U を X の G-不変開集合とする。$j\colon \hookrightarrow X$ を G-埋め込みとする。このとき、準同型写像 $j_*\colon K_G(TU) \longrightarrow K_G(TX)$ を考えることができた。$\forall a \in K_G(TU)$ に対して、a は U のコンパクト集合の外側で恒等作用素となるような、ある G-不変楕円型作用素のシンボル類として表現できることを思い出そう。すなわち、$P \in \overline{\mathcal{P}^0}(U; E, F)$ で、G-同変かつ $[\sigma(P)]_G = a$ となるものを考える。まず、このような P として都合のいい形のものが取れることを示す。$a \in K_G(TU)$ は TU のある複体

$$0 \longrightarrow \pi^*E \xrightarrow{\sigma} \pi^*F \longrightarrow 0$$

として表現できる。ここで、E、F は U 上の G-ベクトルバンドルを表わす。また、σ は 0 次同次準同型写像としてよかった。さて、この複体の台はコンパクトであるから、あるコンパクト集合 L_1 を取れて、同型

$$\alpha\colon E|_{U-L_1} \longrightarrow (U - L_1) \times \mathbb{C}^n,$$

$$\beta\colon F|_{U-L_1} \longrightarrow (U - L_1) \times \mathbb{C}^n,$$

が存在し、$\sigma = \pi^*(\beta^{-1}\alpha)$ が成り立っているとしてよい。擬微分作用素は局所的にはそのシンボルにより完全に決定されるから、$P_1 \in \mathcal{P}^0(U; E, F)$ を $\sigma(P_1) = \sigma(\pi^*(\beta^{-1}\alpha))$ となるように定めればよい。ところで、P_1 を大域的に σ から構成する際に 1 の分割をうまく取ることによって、$L \subset L_1$ であるような U の G-不変コンパクト集合の外側で P_1 が同型写像であるようにできる。P_1 を使って $P = Av(P_1)$ とおけば、作り方から

$$a = [\sigma(P)]_G$$

が成り立つ。従って最初から、同型

$$\alpha\colon E|_{U-L_1} \longrightarrow (U-L_1)\times\mathbb{C}^n,$$
$$\beta\colon F|_{U-L_1} \longrightarrow (U-L_1)\times\mathbb{C}^n,$$

があり、$\forall u\in\mathcal{D}(U-L;E)$ に対し

$$Pu=\beta^{-1}\alpha\, u$$

であるとしてよい。E、F 及び P は U の外側に自明バンドルとして拡張できる。それらを j_*E、j_*F、j_*P と書くことにすると、明らかに

$$j_*(a)=j_*[\sigma(P)]_G=[\sigma(j_*P)]_G\in K_G(TX)$$

が成り立つ。一方 $u\in\mathcal{D}(X;j_*E)$ に対して、j_*P は U の外側では同型写像だから

$$(j_*P)u=0\Longrightarrow \mathrm{supp}u\subset U \text{ かつ } Pu|_U=0$$

が成り立つ。従って、

$$\mathrm{Ker}P\cong\mathrm{Ker}j_*P$$

を得る。P の形式的随伴作用素に対して同様の考察を行なえば

$$\mathrm{Coker}P\cong\mathrm{Coker}j_*P$$

を得る。以上より

$$\begin{aligned}\text{a-index}_G^X(j_*P)&=[\mathrm{Ker}j_*P]_G-[\mathrm{Coker}j_*P]_G\\&=[\mathrm{Ker}P]_G-[\mathrm{Coker}P]_G\\&=\text{a-index}_G^U(P)\end{aligned}$$

を得る。これは、$(\text{a-index}_G^X\circ j_*)(a)=\text{a-index}_G^U(a)$ を意味する。従って a-index が公理（B1）を満たすことが証明された。 □

補題 5.4. 解析的指数 a-index は規格化公理（*B2"*）を満たす。

証明. （B2"）の (i)(ii) を示すために $n=1,2$ のときに n-球面 S^n 上の de Rham 複体を考える。de Rham 複体のシンボル類は de Rham 類 ρ_{S^n} である。S^n の de Rham コホモロジー群については

$$\mathrm{H}^q_{DR}(S^n;\mathbb{C})=\{0\},\quad 0<q<n,$$
$$\dim\mathrm{H}^0_{DR}(S^n;\mathbb{C})=\dim\mathrm{H}^n_{DR}(S^n;\mathbb{C})=1$$

であった。$SO(2)$ は連結で、従って $\mathrm{H}^q_{DR}(S^2;\mathbb{C})$ の上に自明に作用しているので

$$\text{a-index}^{S^2}_{SO(2)}\rho_{S^2}=\dim\mathrm{H}^0_{DR}(S^2;\mathbb{C})+(-1)^2\dim\mathrm{H}^2_{DR}(S^2;\mathbb{C})$$

を得る。従って (i) が示された。一方 $O(1)$ の生成元 -1 は S^1 の向きを逆にする。従って、これは $\mathrm{H}^1_{DR}(S^1;\mathbb{C})$ 上に (-1) 倍として作用する。また、これは $\mathrm{H}^0_{DR}(S^1;\mathbb{C})$ 上には自明に作用する。従って、

$$\text{a-index}^{S^1}_{O(1)}\rho_{S^1} = [\mathrm{Ker}d]_{O(1)} - [\mathrm{Coker}d]_{O(1)} = 1 - \xi \in R(O(1))$$

を得る。ここで、d は外微分作用素を、$\xi\colon O(1) \longrightarrow U(1) = S^1$ は標準的表現を表わす。従って (ii) が示された。最後に（B2"）の (iii) を示そう。P を $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の作用素で

$$P = \begin{cases} e^{inx}, \text{ for } n \geq 0 \\ 0, \text{ for } n < 0 \end{cases}$$

で定義されるものとする。まず $P \in \mathcal{P}^0$ であることを示す。$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ を supp$f$ が長さが 2π より小さい区間に含まれるようなものとする。$f(x)e^{inx}$ の Fourier 係数は $\hat{f}(n-\xi)$ である。従って f の台 supp$f$ の上で

$$\begin{aligned} p_f(x,\xi) &= e^{-ix\xi}P(f(x)e^{ix\xi}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n-\xi)e^{ix(n-\xi)} \\ &= f(x) - \sum_{i=-1}^{-\infty} \hat{f}(n-\xi)e^{ix(n-\xi)} \end{aligned}$$

を得る。ここで、$\xi \to -\infty$ とすると、和 $\sum_{n=0}^{\infty}$ は $|\xi|$ のどんな巾よりも早く 0 に収束する。同様に、$\xi \to \infty$ とすると、和 $\sum_{i=-1}^{-\infty}$ は $|\xi|$ のどんな巾よりも早く 0 に収束する。従って P は階数 0 の擬微分作用素である。

$$\begin{aligned} p_f(x,\xi) &\to f(x) \text{ as } \xi \to +\infty \\ p_f(x,\xi) &\to \ \ 0 \quad \text{as } \xi \to -\infty \end{aligned}$$

より $P \in \mathcal{P}^0$ かつ、そのシンボルが

$$\sigma_P(x,\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

で与えられることがわかる。作用素 A を

$$A = e^{ix}P + (1-P)$$

で定義すると、 $A \in \mathcal{P}^0$ かつ、そのシンボルが

$$\sigma_A(x,\xi) = \begin{cases} e^{ix}, & \xi > 0 \\ 1, & \xi < 0 \end{cases}$$

で与えられることがわかる。従って A は楕円型である。一方、定義より

$$Ae^{inx} = \begin{cases} e^{i(n+1)x}, & n \geq 0 \\ e^{inx}, & n < 0 \end{cases}$$

であるから、$\mathrm{Ker}A = \{0\}$ かつ $\mathrm{Coker}A$ は定数関数よりなることがわかる。従って

$$\mathrm{index}^{S^1}_{O(1)} A = -[\mathrm{Coker}A]_{O(1)} = -1$$

を得る。ここで我々が示したいことは、自然準同型写像

$$K_{O(1)}(T\mathbb{R}^1) \longrightarrow K_{O(1)}(TS^1)$$

により $-j_!(1) \in K_{O(1)}(T\mathbb{R}^1)$ が $\sigma_A \in K_{O(1)}(TS^1)$ に移るということである。ここで j は原点の $\mathbb{R}^1$ への埋め込みを表わす。$\mathbb{R}^1$ 上のシンボル σ を

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_A(x, \xi), & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 1, & x < 0,\ x > 2\pi \end{cases}$$

で定義すると、上の準同型写像で $[\sigma]_{O(1)} \longmapsto [\sigma_A]_{O(1)}$ となることは明らかである。そこで

$$[\sigma]_{O(1)} = -j_!(1) \in K_{O(1)}(T\mathbb{R}^1)$$

を示せばよい。$(x, i\xi)$-平面において σ の台は $0 \leq x \leq 2\pi$、$|\xi| \leq 1$ で定義される長方形であり、辺 $\xi = 1$ の上で $\sigma = e^{ix}$ となっている。一方 $j_!(1)$ の台は $|x + i\xi| \leq 1$ で定義される単位円で、その円周上で $j_!(1) = x + i\xi$ となっている。このことから $\sigma \simeq -j_!(1)$ であることがわかる。従って $[\sigma]_{O(1)} = -j_!(1)$、すなわち

$$\text{a-index}(j_!(1)) = -\text{a-index}(A) = -(-1) = 1$$

を得る。以上により (iii) が示された。 □

5.4 解析的指数の乗法性

補題 5.5. 解析的指数 a-index は乗法性公理（*B3*）を満たす。

証明. 状況を思い出しておこう。H はコンパクト Lie 群で、F、X はコンパクト H-多様体で、$Y = P \times_H F$ は X 上のファイバーバンドルであった。ここで、$P \longrightarrow X$ は主 H バンドルであった。そして、さらに別のコンパクト Lie 群 G が P 及び F の上に H の作用と可換になるように作用していると仮定していた。このとき G は Y 上にも作用していると考えられるのであった。さて、$a \in K_G(TX)$、$b \in K_{G\times H}(TF)$ に対して、その積 $ab \in K_G(TY)$ を考える。我々が示すべきことは

$$\text{a-index}^Y_G(ab) = \text{a-index}^X_G(a) \cdot \text{a-index}^F_{G\times H}(b)$$

である。$a \in K_G(TX)$ が階数 1 の 滑らかな G-不変なシンボル α によって表現されているとする。$A_1 \in \mathcal{P}^1$ を $\sigma(A) = \alpha$ であるような擬微分作用素とする。$\{U_i\}$ を X の開被覆で P 及び Y の局所自明化を与えるものとする。$\{\phi_i^2\}$ を $\{U_i\}$ に従属する滑らかな 1 の分解とする。各 U_j 上で作用素 A_1^j を

$$A_1^j := \phi_j A \phi_j$$

と定義する。$Y_j := p^{-1}(U_j) \cong U_j \times F$ とする。ただし、$p\colon Y \longrightarrow X$ は射影を表わす。この A_1^j たちの Y_j 上へのリフト $\tilde{A_1^j}$ を考える。$\tilde{A_1^j} \in \overline{\mathcal{P}^1}$ である。作用素 $\tilde{A}$ を

$$\tilde{A} := Av(\sum_j \tilde{A_1^j}) \in \overline{\mathcal{P}^1}(Y)$$

で定める。すると、定義から

$$\sigma(\tilde{A}) = \tilde{\alpha}$$

が成り立つ。ここで $\tilde{\alpha}$ は α の Y 上へのリフトを表わす。Y の余接ベクトルを水平成分 ξ と垂直成分 η に分ける。従って ξ は TX の元と同一視できる。このとき、リフトの定義から

$$\tilde{\alpha}(\xi, \eta) = \alpha(\xi)$$

が成り立つ。$\tilde{A}$ を零切断に制限することにより G-不変楕円型作用素

$$A = Av(\sum_j A_1^j) \in \overline{\mathcal{P}^1}(X)$$

を得る。

このとき $\sigma(A) = \alpha$ となっている。次に、$b \in K_{G\times H}(TF)$ について考える。まず、$G \times H$-不変な 1 階の作用素 $B \in \overline{\mathcal{P}^1}(F)$ で $\beta = \sigma(B)$ が b を表現するものを取る。$\tilde{B}_1$ を B の $P \times F$ 上へのリフトとする。$\tilde{B}_1$ は $G \times H$-不変なので、これから自然に $Y = P \times_H F$ 上の作用素 $\tilde{B}$ が定まる。これは $\tilde{B}_1$ をファイバーに沿って定値であるような切断上に制限したものとして得られる。各 U_j 上 $\tilde{B}_j := \tilde{B}|_{Y_j}$ とおくと、これらはちょうど $B|_{U_j}$ のリフトになっている。従って、$\tilde{B}_j \in \overline{\mathcal{P}^1}(Y_j)$ また $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{P}}^1(Y)$ であることがわかる。$\tilde{\beta} := \sigma(\tilde{B})$ とおくと、作り方から $\tilde{\beta}(\xi, \eta) = \beta(\eta)$ が成り立つことがわかる。

積 ab がどんなものであるか考えよう。作用素 D を

$$D = \begin{pmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}^* \\ \tilde{B} & \tilde{A}^* \end{pmatrix} \in \overline{\mathcal{P}^1}(Y)$$

により定義する。D は明らかに G-不変な作用素で、作り方から

$$\sigma(D) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & -\tilde{\beta}^* \\ \tilde{\beta} & \tilde{\alpha}^* \end{pmatrix}$$

となっている。

注意 63. ここまでの記号を正確に使うと次の通りである。すなわち、$A \in \overline{\mathcal{P}^1}(X; E^0, E^1)$、$B \in \overline{\mathcal{P}^1}(X; G^0, G^1)$ とすると $D \in \overline{\mathcal{P}^1}(Y; E^0 \boxtimes G^0 \oplus E^1 \boxtimes G^1, E^1 \boxtimes G^0 \oplus E^0 \boxtimes G^1)$ である。我々は記号の簡単のため、この正確な記法は用いない。

シンボル $\sigma(D)$ は積 ab を表現している。証明の残りはシンボル類 $\sigma(D)$ の解析的指数を計算することである。まず、$\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ が可換であることを見よう。これは簡単にわかる。局所的には $Y_j \cong U_j \times F$ であり、$\tilde{A_1^j}$ と $\tilde{B_1^j}$ は可換である。従って $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ は可換である。この可換性を使って計算すると、

$$D^*D = \begin{pmatrix} \tilde{A}^*\tilde{A} + \tilde{B}^*\tilde{B} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^*\tilde{A} + \tilde{B}^*\tilde{B} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix},$$

$$DD^* = \begin{pmatrix} \tilde{A}\tilde{A}^* + \tilde{B}\tilde{B}^* & 0 \\ 0 & \tilde{A}\tilde{A}^* + \tilde{B}\tilde{B}^* \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$$

を得る。このとき、

$$\mathrm{Ker}D = \mathrm{Ker}D^*D = \mathrm{Ker}P_0 \oplus \mathrm{Ker}Q_0,$$

$$\mathrm{Ker}D^* = \mathrm{Ker}DD^* = \mathrm{Ker}P_1 \oplus \mathrm{Ker}Q_1$$

であるから

$$\text{a-index}_G^Y(\sigma(D)) = ([\mathrm{Ker}P_0]_G - [\mathrm{Ker}P_1]_G) + ([\mathrm{Ker}Q_0]_G - [\mathrm{Ker}Q_1]_G) \in R(G)$$

を得る。ここで、作用素 P_0 について考えると、任意の滑らかな切断 u に対して

$$\langle P_0 u, u\rangle = \langle \tilde{A}u, \tilde{A}u\rangle + \langle \tilde{B}u, \tilde{B}u\rangle$$

であるから

$$\mathrm{Ker}P_0 = \mathrm{Ker}\tilde{A} \cap \mathrm{Ker}\tilde{B}$$

が成り立つ。ところで、$\mathrm{Ker}\tilde{B}$ は X 上の滑らかなベクトルバンドルとして

$$K_B := P \times \mathrm{Ker}B$$

の形に書ける。$\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ は可換だから $\tilde{A}$ は K_B の切断に作用するような作用素 C を定める。$\tilde{A} = Av(\sum_j \phi_j \tilde{A_1^j} \phi_j)$ の形をしていたから、C は $C = Av(\sum_j \phi_j C_j \phi_j)$ の形に書ける。ただし、各 C_j は $\tilde{A_1^j}$ より定まる $K_B|_{U_j}$ 上の作用素である。このとき、リフト $\tilde{A_1^j}$ の定義を思い出すと、$C_j = A_1 \otimes_H 1_{K_B}$ であることがわかる。これより、$C_j \in \mathcal{P}^1$、従って $C \in \overline{\mathcal{P}^1}$ かつ、$\sigma(C) = \alpha \otimes 1_{K_B}$ であることがわかる。結局 C は X 上の G-不変楕円型作用素で、そのシンボル $\sigma(C)$ は積 $a[K_B] \in K_G(TX)$ を表現するものであることがわかる。一方、明らかに $\tilde{A}^* = \tilde{(A^*)}$ であるから、$\tilde{A}$ を $\tilde{A}^*$ に、P_0 を P_1 に取り替えて同様の議論をすれば、作用素 C^* について同様の結果を得る。

これまでの結果をつかうと、

$$\begin{aligned}\text{a-index}_G^X(a[K_B]) &= [\text{Ker}C]_G - [\text{Ker}C^*]_G \\ &= [\text{Ker}P_0]_G - [\text{Ker}P_1]_G \in R(G)\end{aligned}$$

を得る。全く同様にして、$L_B = P \times_H \text{Coker}B$ に対して

$$\text{a-index}_G^X(a[L_B]) = [\text{Ker}Q_1]_G - [\text{Ker}Q_0]_G \in R(G)$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned}\text{a-index}_G^Y(ab) &= \text{a-index}_G^Y(\sigma(D)) \\ &= \text{a-index}_G^X\left(a([K_B]_G - [L_B]_G)\right) \\ &= \text{a-index}_G^X\left(a \cdot \mu_P(\text{a-index}_{G\times H}^F(b))\right) \in R(G)\end{aligned}$$

を得る。以上により解析的指数 a-index が公理（B3）を満たすことが示された。 □

注意 64. 従って、解析的指数は公理（B3'）、（B3"）を自動的に満たす。

References

[1] R.A. Adams, SOBOLEV SPACES, ACADEMIC PRESS, 1975.

[2] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators:* I, Ann. of Math. **87** (1968), 484-530.

[3] L. Hörmander, *Pseudo-Differential Operators*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 501-507.

[4] J.J. Kohn and L. Nirenberg, *An Algebra of Pseudo-Differential Operators*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 269-305.

[5] R.T. Seely, *Integro-differetial operators on vector bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 167-204.

[6] R. Palais, FOUNDATIONS OF GLOBAL NON-LINEAR ANALYSIS, Benjamin, 1968.

[7] R. Palais, Seminor on the Atiyah-Singer Index Theorem, Ann. of Math. Study **57**, Princeton, 1965.

[8] 熊ノ郷準, 擬微分作用素, 岩波書店.

6　指数定理の証明完結

ここまでの話をまとめると Atiyah-Singer 指数定理の証明が完結する。改めて状況をはっきりさせておこう。X を n 次元コンパクト微分可能多様体、E、F を X 上の複素ベクトルバンドル、$D\colon C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(F)$ を楕円型微分作用素とする。このとき、定理 1.1 は D の指数が

$$\mathrm{index}D = (-1)^n (ch(\sigma(D))\mathcal{T}(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))[TX]$$

で与えられることを主張するものである。ここで、指数とは

$$\mathrm{index}D = \dim \mathrm{Ker}D - \dim \mathrm{Coker}D$$

のことである。また、定理 1.3 は位相的指数

$$\text{t-index}\colon K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

と、解析的指数

$$\text{a-index}\colon K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が一致すること、すなわち

$$\text{t-index} = \text{a-index}$$

を主張するものであった。定理 1.1 は 定理 1.3 の系として得られる。そこで、まず定理 1.3 の証明から始めよう。

定理 1.3 の証明 補題 5.2、5.3、5.4、5.5 より解析的指数は公理（A1）、（B1）、（B2”）、(B3’）を満たす。従って、定理 4.1 により解析的指数 a-index は指数準同型写像であり、

$$\text{a-index} = \text{t-index}$$

が成り立つ。これで定理 1.3 が証明された。 □

定理 1.1 の証明 楕円型微分作用素 D に対し、そのシンボル類 $\sigma(D)$ は $K(TX)$ の元である。定理 1.3 より、

$$\text{a-index}(\sigma(D)) = \text{t-index}(\sigma(D))$$

が成り立つ。一方、解析的指数の定義から

$$\text{a-index}(\sigma(D)) = \mathrm{index}D$$

が、また定理 3.3 から

$$\text{t-index}(\sigma(D)) = (-1)^n (ch(\sigma(D))\mathcal{T}(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))[TX]$$

が成り立つ。よって、定理 1.1 は証明された。 □

注意 65. これらの定理はコンパクト Lie 群の作用があるときにも成り立つ。ただし、その場合指数は $R(G)$ 値を取る。